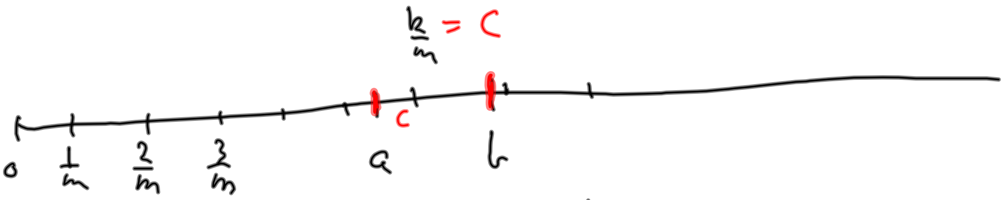
30.8.2011.

Setning 2.2.7. Ethvert åpent intervall inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Hvorfor?

La intervallet være (a, b).



Velg $m \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{m} < b - a$

Da må minst ett tall $\frac{k}{m}$ havne inn i intervallet (a, b). Og $\frac{k}{m}$ er et rasjonalt tall.

Vise irrasjonalt tall i (a, b):

Sett $c = \frac{k}{m}$. Ide: Legg til et lite irrasjonalt tall.

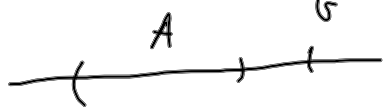
Velg $p \in \mathbb{N}$ s.a. $\frac{1}{p} < \frac{b-c}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} < p \cdot b - p \cdot c$

så $\sqrt{2} + pc < pb \Rightarrow c + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$

Kompletthetsprinsippet.

De rasjonale tallene fyller ikke ut tallinjen, det blir huller, f.eks. i $\sqrt{2}$.

En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det fins et tall b slik at $b \geq x$ for alle $x \in A$.



b kalles en øvre skranke for A

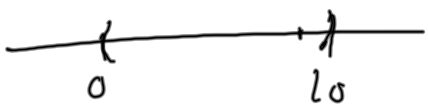
b kalles en minste øvre skranke for A hvis b er mindre enn alle andre øvre skranker for A.

Vi skriver $b = \sup A$.

Eks. $A = [0, 10]$. En øvre skranke er 100

$\sup A = 10$,

$A = (0, 10)$, $\sup A = 10$



$A = \mathbb{N}$ – fins ikke

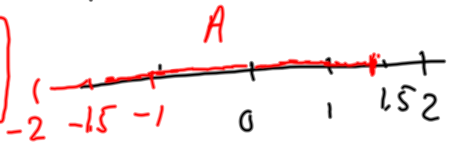
$\inf A$ – største nedre skranke

Kompletthetsprinsippet:

Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke grense i $\mathbb{R}$.

Ex Vise at $\sqrt{2}$ er et reelt tall:

Sett $\boxed{A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 2\}}$



Merk at $1 \in A$ så A er ikke tom.

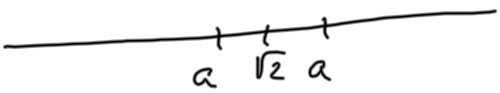
Dessuten er A oppad begrenset av tallet 2.

Derfor fins $a = \sup A$, $a \in \mathbb{R}$ ved kompletthetsprin.

Må vise at $a^2 = 2$, dvs. $a = \sqrt{2}$.

Vi viser dette ved å forsøke med $a^2 < 2$ og $a^2 > 2$ — begge gir selvmotsigelse.

eneste mulighet $a^2 = 2$.



Uendelighet

Naturlige tall: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, - - - -

Mengden av naturlige tall er uendelig

En mengde som kan telles sies å være tellbar.

<u>Ex.</u> Partallene

$$\begin{array}{cccccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14 & ---- \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 & \end{array}$$

Partallene er tellbare – altså er det like mange partall som naturlige tall.
Samtidig er det opplagt færre partall enn naturlige tall

Hva med de rasjonale tallene, er de tellbare?

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{7}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{7}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \frac{7}{3} & \cdots \\ & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Altså er mengden av rasjonale tall tellbar !

Hva med mengden av reelle tall i intervallet $[0,1]$, er den tellbar?

Anta at vi kunne telle disse tallene. Da kan vi sette dem opp i en tabell:

$x_1: 0.d_1^1 d_2^1 d_3^1 d_4^1 d_5^1 d_6^1 d_7^1 - - - - - -$
$x_2: 0.d_1^2 d_2^2 d_3^2 d_4^2 d_5^2 d_6^2 d_7^2 - - -$
$x_3: 0.d_1^3 d_2^3 d_3^3 d_4^3 d_5^3 d_6^3 d_7^3 - - -$
$x_4: 0.d_1^4 d_2^4 d_3^4 d_4^4 d_5^4 d_6^4 d_7^4 - - - -$
$\vdots$

Men vi kan konstruere et tall a som ikke står på lista!

$a = 0.t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - - -$

der $t_1 \neq d_1^1$, $t_2 = d_2^2$, $t_3 \neq d_3^3$ osv.

altså er $a \neq x_1$, $a \neq x_2$, $a \neq x_3$ - - -

så a står ikke i lista!

Konklusjon $[0,1]$ er ikke tellbar!