UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Tenkeonsdag i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Dag:	Onsdag 28. november 2012.
Tid for moroa:	16:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av settet består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hvilken av følgende differensialligninger er lineær?

- ☐ $y'' + \sin y = x$
- ☒ $y' + y \sin x = 1$
- ☐ $y' + y^{1/2} = 0$
- ☐ $y'' + y' = \cos y$
- ☐ $y' + 1/y = 2$

Oppgave 2. Differensialligningen $y'' + 4y' + 5y = 0$ har den generelle løsningen

- ☒ $y(x) = e^{-2x}(C \sin x + D \cos x)$
- ☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$
- ☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$
- ☐ $y(x) = C \cos x + D \sin x$
- ☐ $y(x) = e^{x}(C \sin 2x + D \cos 2x)$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Differensialligningen $y' + x^2 y = x^2$, der $x > 0$, har løsningen

☐ $y(x) = x^2 + Ce^{-x^2}$

☐ $y(x) = x^2 + Ce^{x}$

☐ $y(x) = x^2 + C$

☐ $y(x) = x^3/3 + C$

☒ $y(x) = 1 + Ce^{-x^3/3}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 4. Vi benytter Eulers metode for å finne numeriske løsninger av ligningen $y' = ay$. Dette gir en differensligning for $\{y_j\}$ der $y_j \approx y(jh)$, hvilken?

☐ $y_j = e^{ah} y_{j-1}$

☐ $y_j = (1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2) y_{j-1}$

☐ $y_j = y_{j-1} + ah$

☒ $y_j = (1 + ah) y_{j-1}$

☐ $y_j = e^{ax}$

Oppgave 5. Vi tilnærmer den deriverte til funksjonen $f(x)$ i $x = 0$ med uttykket $\big(f(h) - f(0)\big)/h$. Da er feilen

$$\left| f'(0) - \frac{f(h) - f(0)}{h} \right|$$

begrenset av

☒ $\dfrac{h}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f''(x) \big|$

☐ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f''(x) \big|$

☐ $h \max_{x \in [0,h]} \big| f(x) \big|$

☐ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f'''(x) \big|$

☐ $\dfrac{h}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f'(x) \big|$

Oppgave 6. Vi har påstanden P: Det fins alltid nøyaktig ett polynom p_n av grad n som tilfredstiller betingelsene $p_n(x_i) = y_i$ for $i = 0, 1, \ldots, m$, der $(x_i)_{i=0}^m$ og $(y_i)_{i=0}^m$ er reelle tall slik at $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$. Påstanden P er sann hvis

☒ $m = n$

☐ $m = 1$

☐ $m < n$

☐ $m = 0$

☐ $m > n$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Anta at vi bruker trapesregelen til å beregne en tilnærming T til $\int_0^1 f(x)\,dx$, og at vi ser bort fra avrundingsfeil. Da er $T = \int_0^1 f(x)\,dx$ hvis

- [x] f er en parabel
- [ ] $f(x) = \sin x$
- [ ] $f(x) = e^x$
- [ ] f er en rett linje
- [ ] f er et polynom av grad tre

Oppgave 8. Løsningen $x(t)$ av differensialligningen $x'' + \sin(tx') - x^2 = e^t$ er lik den ene løsningen $x_1(t)$ av systemet av to ligninger

- [ ] $x_1' = x_1, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_1^2$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_1) + x_2^2$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_2^2$
- [x] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_1^2$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_1) + x_1^2$

Oppgave 9. En tekst lagres i fire ulike filer med tegnsettene ISO Latin1, UTF-8, UTF-16 og UTF-32. Hvilket av følgende utsagn er da sant?

- [ ] Filen kodet med ISO-Latin1 blir størst
- [ ] Filen kodet med UTF-8 blir størst
- [ ] Filen kodet med UTF-16 blir størst
- [x] Filen kodet med UTF-32 blir størst
- [ ] Alle filene blir like store

Oppgave 10. Et program genererer digital film der hvert bilde inneholder 800×600 punkter og det er 25 bilder per sekund. Fargeinformasjonen i hvert punkt lagres med 24 bits. For hvert sekund med film vil dette gi

- [ ] 64 000 000 bytes
- [ ] 144 000 000 bytes
- [ ] 128 000 000 bytes
- [x] 36 000 000 bytes
- [ ] 12 000 000 bytes

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$9x_{n+2} - 9x_{n+1} + 2x_n = 2, \quad x_0 = 6, \quad x_1 = 2 \tag{1}$$

har løsningen

$$x_n = 1 + \frac{7 - 2^{n+1}}{3^n}.$$

Løsning. Vi finner først den generelle løsningen til den homogene ligningen. Det karakteristiske polynomet $9r^2 - 9r + 2 = 0$ har de to løsningene $r_1 = 1/3$ og $r_2 = 2/3$ slik at den generelle løsningen av den homogene ligningen er

$$x_n^h = C\frac{1}{3^n} + D\frac{2^n}{3^n}.$$

For å finne en partikulær løsning prøver vi med $x_n^p = A$ siden høyresiden er konstant. Dette gir

$$9A - 9A + 2A = 2$$

som har løsningen $A = 1$. Dermed er den generelle løsningen til den inhomogene ligningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C\frac{1}{3^n} + D\frac{2^n}{3^n} + 1.$$

Startverdiene gir ligningene

$$\begin{aligned} 6 &= C + D + 1, \\ 2 &= C/3 + 2D/3 + 1. \end{aligned}$$

Løser vi disse får vi $C = 7$ og $D = -2$ som svarer til løsningen gitt i oppgaven.

b) Anta at vi simulerer (løser numerisk) differensligningen (1) ved hjelp av flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen $\{\bar{x}_n\}$ oppføre seg for store verdier av n? Forklar hvorfor.

Løsning. Når ligningen skal simuleres, genereres verdiene ved hjelp av formelen

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}(2 + 9x_{n+1} - 2x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Så selv om det ikke er noen avrundingsfeil i startverdiene vil det helt sikkert bli avrundingsfeil fra og med x_2 siden vi må dividere med 9. På den annen side vil det bare føre til at verdiene for C og D blir perturbert til $\tilde{C} = 7 + \epsilon_1$ og $\tilde{D} = -2 + \epsilon_2$ der ϵ_1 og ϵ_2 er tall av størrelsesorden 10^{-16}. Den beregnede løsningen vil derfor være på formen

$$\tilde{x}_n = 1 + \frac{7 + \epsilon_1 - (2 - \epsilon_2)^n}{3^n}.$$

Dermed ser vi at x_n vil konvergere mot 1 når n går mot uendelig, mens $\tilde{x}_n$ før eller siden vil bli eksakt lik 1 siden en datamaskin nødvendigvis må operere med et endelig antall siffer. Med andre ord skaper ikke avrundingsfeil problemer av betydning i dette tilfellet.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi studere Taylorpolynomene til logaritmefunksjonen om punktet $a = 1$.

a) Bestem Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \ln x$ om punktet $a = 1$ og bruk dette til å regne ut en tilnærming til $\ln 1.1$.

Løsning. Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ er gitt ved

$$T_3 f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{6} f'''(a).$$

På den annen side er

$$f'(x) = 1/x = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}.$$

Dermed blir

$$T_3 f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Tilnærmingen til $\ln 1.1$ blir da

$$T_3 f(1.1) = 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{3} = \frac{143}{1500} = 0.0953333.$$

Til sammenligning er $\ln 1.1 \approx 0.0953102$.

b) La $T_n f(x)$ betegne Taylorpolynomet til f av grad n om $a = 1$, og la $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ betegne restleddet. Vis at restleddet kan skrives som

$$R_n f(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} c^{-n-1},$$

der c er et tall i intervallet $(1, x)$.

Vi ønsker å bruke $T_n f$ til å regne ut en tilnærmet verdi av $\ln 1.1$. Finn en verdi av n slik at feilen garantert er mindre enn 10^{-10} i tallverdi.

Løsning. Formelen for restleddet vist under inneholder $f^{(n+1)}(c)$. Hvis vi fortsetter derivasjonene i (a) finner vi

$$f^{(iv)}(x) = -6x^{-4}, \quad f^{(v)}(x) = 24x^{-5}, \ldots, f^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)! x^{-n}.$$

Dermed gir restleddet under

$$R_n f(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1} n!\, c^{-n-1}}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)c^{n+1}}$$

der c er et tall i intervallet $(1, x)$. Vi vet at funksjonen $1/c^{n+1}$ er avtagende på intervallet $(1, x)$ og derfor er størst for $c = 1$. Og siden vi er interessert i å tilnærme $\ln 1.1$ med $T_n f(1.1)$ trenger vi å estimere $R_n f(x)$ for $x = 1.1$. Vi får da

$$\left|R_n f(1.1)\right| = \frac{0.1^{n+1}}{(n+1)c^{n+1}} \leq \frac{0.1^{n+1}}{n+1}.$$

Uttrykket til høyre avtar med n, så vi velger derfor n som det minste heltallet slik at

$$\frac{0.1^{n+1}}{n+1} \leq 10^{-10}.$$

Vi prøver med ulike verdier og finner at dette inntreffer første gang for $n = 9$.

(Fortsettes på side 6.)

Hint: Her kan du få bruk for Lagranges versjon av restleddet som sier at om vi Taylorutvikler om a så kan feilleddet skrives som

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Her er c er et tall i intervallet (a, x)

Oppgave 3. Teksten $\boldsymbol{x} = BAAAAAAAAA$ er gitt og skal kodes på en kompakt måte.

a) Kod teksten $\boldsymbol{x}$ med Huffman-koding. Hvor mange bit består koden av?

Løsning. Siden det bare er to symboler i teksten er det beste huffmankoding kan gjøre å gi 'A' koden 0 og 'B' koden 1 (eller omvendt). Koden blir da '100000000' og er 10 bit lang.

b) Kod teksten $\boldsymbol{x}$ med aritmetisk koding og vis at den aritmetiske koden ligger i intervallet $I = [a, b)$ der

$$a = 0.9, \quad b = 0.9 + \frac{9^9}{10^{10}}.$$

Finn tallet på formen $j/2^n$ med minst mulig n som ligger i I, og bestem fra dette en koding av teksten $\boldsymbol{x}$. Hvor mange bit består koden av?

Løsning. Symbolet 'A' forekommer 9 ganger i teksten mens 'B' forekommer 1 gang, altså er $p(A) = 9/10$ og $p(B) = 1/10$. Vi lar 'A' svare til intervallet $[0, 0.9)$ og 'B' til intervallet $[0.9, 1)$. Siden det første symbolet er en 'B' ser vi at den aritmetiske koden må ligge i intervallet $[a_1, b_1) = [0.9, 1)$. Det neste symbolet er en 'A', så den aritmetiske koden må ligge i de første 90% av $[a_1, b_1)$, altså i intervallet

$$[a_2, b_2) = [0.9, 0.9 + 0.9 \cdot 0.1) = [0.9, 0.9 + 9/100).$$

På samme måte ser vi at det neste symbolet også er A, så $[a_3, b_3)$ utgjør de første 90 % av $[a_2, b_2)$,

$$[a_3, b_3) = [0.9, 0.9(9/100)) = [0.9, 9^2/10^3).$$

Vi fortsetter og finner generelt at $[a_i, b_i) = [0.9, 0.9 + 9^{i-1}/10^i)$ for $i = 1, 2, \ldots, 10$. Spesielt får vi at den aritmetiske koden til hele teksten må ligge i intervallet $[a, b) = [a_{10}, b_{10})$ som angitt i oppgaveteksten.
Bredden på intervallet $[a, b)$ er

$$b - a = \frac{9^9}{10^{10}} \approx 0.038742.$$

Vi er ute etter tall i 2-tallsystemet som ligger i intervallet $[a, b)$. Med desimaltall har vi $[a_9, b_9) \approx [0.9, 0.938742)$. Vi ser at $15/16 = 0.9375$ ligger i intervallet, så den aritmetiske koden blir 1111 og består av 4 bits.

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 4. Vi har gitt en differensialligning med tilhørende randverdier på intervallet $[0,1]$,

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

der α er en reell konstant. Legg merke til at vi har gitt en randbetingelse ved $x = 0$ og en ved $x = 1$.
Finn løsningen.
Finnes det verdier av α slik at løsningen ikke eksisterer?

Løsning. Den karakteristiske ligningen er $r^2 + \alpha = 0$ som har løsningene $r = \alpha i$ og $\bar{r} = -\alpha i$. Det betyr at den generelle løsningen er

$$y(x) = C \cos \alpha x + D \sin \alpha x.$$

Randverdiene gir $0 = y(0) = C$ og $1 = y(1) = D \sin \alpha$. Dermed er løsningen

$$y(x) = \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha},$$

så sant nevneren ikke er 0. Dette betyr at vi kan ikke ha $\alpha = k\pi$ for noe heltall $k \in \mathbb{Z}$.

Ekstraoppgaver

Oppgave 5. En følge er gitt ved differensligningen $x_n = x_{n-1}/2 + (n+1)/n$ for $n \geq 1$, der $x_0 = 2$. Vis ved induksjon at $2 \leq x_n \leq 3$ for alle heltall $n \geq 0$.

Løsning. Vi legger først merke til at $x_0 = 2$, så $2 \leq x_0 \leq 3$, med andre ord er påstanden sann for $n = 0$.
Anta nå at $n \geq 1$ og at $2 \leq x_n \leq 3$, vi må vise at da er også $2 \leq x_{n+1} \leq 3$.
Vi har at

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{n+2}{n+1} \geq \frac{2}{2} + 1 = 2,$$

så x_{n+1} tilfredstiller den første ulikheten. Dessuten er $(n+2)/(n+1) \leq 3/2$ når $n \geq 1$ så

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

Dermed ligger x_{n+1} i $[2,3]$ om x_n gjør det, og induksjonsbeviset er fullført.

Oppgave 6.

a) Finn parabelen p som interpolerer funksjonen f i punktene $x = 0$, $x = h$ og $x = 2h$ (parabelen tilfredstiller altså betingelsene $p(0) = f(0)$, $p(h) = f(h)$ og $p(2h) = f(2h)$).
Deriver p og utled tilnærmingen $\delta(f)$ til $f'(0)$ gitt ved

$$f'(0) \approx \delta(f) = \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h}.$$

(Fortsettes på side 8.)

Løsning. Vi skriver parabelen på formen

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-h).$$

Interpolasjonsbetingelsene gir ligningene

$$\begin{aligned} f(0) &= p(0) = c_0, \\ f(h) &= p(h) = c_0 + c_1 h, \\ f(2h) &= p(2h) = c_0 + 2c_1 h + 2c_2 h^2. \end{aligned}$$

Fra den første ligningen får vi $c_0 = f(0)$, fra den andre $c_1 = \big(f(h) - f(0)\big)/h$ og fra den tredje

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{f(2h) - c_0 - 2c_1 h}{2h^2} = \frac{f(2h) - f(0) - 2h\dfrac{f(h)-f(0)}{h}}{2h^2} \\ &= \frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2}. \end{aligned}$$

Altså er parabelen gitt ved formelen

$$p(x) = f(0) + \frac{f(h) - f(0)}{h} x + \frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2} x(x-h).$$

Den deriverte av p er

$$p'(x) = c_1 + c_2(2x - h).$$

Vi bruker $p'(0)$ som en tilnærming til $f'(0)$. Dette gir

$$\begin{aligned} f'(0) \approx p'(0) = c_1 - hc_2 &= \frac{f(h) - f(0)}{h} - h\frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2} \\ &= \frac{2f(h) - 2f(0) - f(2h) + 2f(h) - f(0)}{2h} \\ &= \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h} = \delta(f) \end{aligned}$$

som er det vi skulle vise.

b) Vis at feilen i denne tilnærmingen er gitt ved

$$\big|f'(0) - \delta(f)\big| \le h^2 \max_{x\in[0,2h]} \big|f'''(x)\big|.$$

Hint: I denne oppgaven kan du bruke at feilleddet i Taylors formel kan skrives

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

der ξ er et tall i intervallet $[a, x]$.

Løsning. Vi ser på feilen $\big|f'(0) - \delta(f)\big|$, men erstatter $f(h)$ og $f(2h)$ med Taylorpolynomer med feilledd opp til og med tredje grad, siden vi ser at det oppgitte feilestimatet går opp til f'''. Taylorutviklingene vi bruker er

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0, h), \\ f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + 2h^2 f''(0) + \frac{4h^3}{3} f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (0, 2h). \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 9.)

Vi skal sette dette inn i feilen

$$\left|f'(0)-\delta(f)\right| = \left|f'(0) - \frac{-f(2h)+4f(h)-3f(0)}{2h}\right|,$$

men la oss først forenkle uttrykket i telleren til $\delta(f)$. Vi får

$$\begin{aligned}
-f(2h)+4f(h)-3f(0) &= -f(0)-2hf'(0)-2h^2f''(0)-\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)\\
&\quad + 4f(0)+4hf'(0)+2h^2f''(0)+\frac{2h^3}{3}f'''(\xi_1)\\
&\quad - 3f(0)\\
&= 2hf'(0)-\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)+\frac{2h^3}{3}f'''(\xi_1).
\end{aligned}$$

Setter vi dette inn i utrykket for feilen får vi

$$\begin{aligned}
\left|f'(0)-\delta(f)\right| &= \left|f'(0) - \frac{-f(2h)+4f(h)-3f(0)}{2h}\right|\\
&= \left|f'(0) - \frac{2hf'(0)-\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)+\frac{2h^3}{3}f'''(\xi_1)}{2h}\right|\\
&= \left|\frac{2h^2}{3}f'''(\xi_2)-\frac{h^2}{3}f'''(\xi_1)\right|\\
&\le \frac{2h^2}{3}\left|f'''(\xi_2)\right|+\frac{h^2}{3}\left|f'''(\xi_1)\right|\\
&\le \left(\frac{2h^2}{3}+\frac{h^2}{3}\right)\max_{x\in[0,2h]}\left|f(x)\right|\\
&\le h^2\max_{x\in[0,2h]}\left|f(x)\right|
\end{aligned}$$

Lykke til!