UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Tenkeonsdag i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Dag:	Onsdag 28. november 2012.
Tid for moroa:	16:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av settet består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hvilken av følgende differensialligninger er lineær?

☐ $y'' + \sin y = x$
☐ $y' + y \sin x = 1$
☐ $y' + y^{1/2} = 0$
☐ $y'' + y' = \cos y$
☐ $y' + 1/y = 2$

Oppgave 2. Differensialligningen $y'' + 4y' + 5y = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = e^{-2x}(C \sin x + D \cos x)$
☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$
☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$
☐ $y(x) = C \cos x + D \sin x$
☐ $y(x) = e^{x}(C \sin 2x + D \cos 2x)$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Differensialligningen $y' + x^2 y = x^2$, der $x > 0$, har løsningen

- ☐ $y(x) = x^2 + Ce^{-x^2}$
- ☐ $y(x) = x^2 + Ce^{x}$
- ☐ $y(x) = x^2 + C$
- ☐ $y(x) = x^3/3 + C$
- ☐ $y(x) = 1 + Ce^{-x^3/3}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 4. Vi benytter Eulers metode for å finne numeriske løsninger av ligningen $y' = ay$. Dette gir en differensligning for $\{y_j\}$ der $y_j \approx y(jh)$, hvilken?

- ☐ $y_j = e^{ah} y_{j-1}$
- ☐ $y_j = (1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2) y_{j-1}$
- ☐ $y_j = y_{j-1} + ah$
- ☐ $y_j = (1 + ah) y_{j-1}$
- ☐ $y_j = e^{ax}$

Oppgave 5. Vi tilnærmer den deriverte til funksjonen $f(x)$ i $x = 0$ med uttykket $\big(f(h) - f(0)\big)/h$. Da er feilen

$$\left| f'(0) - \frac{f(h) - f(0)}{h} \right|$$

begrenset av

- ☐ $\dfrac{h}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f''(x) \big|$
- ☐ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f''(x) \big|$
- ☐ $h \max_{x \in [0,h]} \big| f(x) \big|$
- ☐ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f'''(x) \big|$
- ☐ $\dfrac{h}{2} \max_{x \in [0,h]} \big| f'(x) \big|$

Oppgave 6. Vi har påstanden P: Det fins alltid nøyaktig ett polynom p_n av grad n som tilfredstiller betingelsene $p_n(x_i) = y_i$ for $i = 0, 1, \ldots, m$, der $(x_i)_{i=0}^m$ og $(y_i)_{i=0}^m$ er reelle tall slik at $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$. Påstanden P er sann hvis

- ☐ $m = n$
- ☐ $m = 1$
- ☐ $m < n$
- ☐ $m = 0$
- ☐ $m > n$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Anta at vi bruker trapesregelen til å beregne en tilnærming T til $\int_0^1 f(x)\,dx$, og at vi ser bort fra avrundingsfeil. Da er $T = \int_0^1 f(x)\,dx$ hvis

- ☐ f er en parabel
- ☐ $f(x) = \sin x$
- ☐ $f(x) = e^x$
- ☐ f er en rett linje
- ☐ f er et polynom av grad tre

Oppgave 8. Løsningen $x(t)$ av differensialligningen $x'' + \sin(tx') - x^2 = e^t$ er lik den ene løsningen $x_1(t)$ av systemet av to ligninger

- ☐ $x_1' = x_1, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_1^2$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_1) + x_2^2$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_2^2$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_1^2$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_1) + x_1^2$

Oppgave 9. En tekst lagres i fire ulike filer med tegnsettene ISO Latin1, UTF-8, UTF-16 og UTF-32. Hvilket av følgende utsagn er da sant?

- ☐ Filen kodet med ISO-Latin1 blir størst
- ☐ Filen kodet med UTF-8 blir størst
- ☐ Filen kodet med UTF-16 blir størst
- ☐ Filen kodet med UTF-32 blir størst
- ☐ Alle filene blir like store

Oppgave 10. Et program genererer digital film der hvert bilde inneholder 800×600 punkter og det er 25 bilder per sekund. Fargeinformasjonen i hvert punkt lagres med 24 bits. For hvert sekund med film vil dette gi

- ☐ 64 000 000 bytes
- ☐ 144 000 000 bytes
- ☐ 128 000 000 bytes
- ☐ 36 000 000 bytes
- ☐ 12 000 000 bytes

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$9x_{n+2} - 9x_{n+1} + 2x_n = 2, \quad x_0 = 6, \quad x_1 = 2 \tag{1}$$

har løsningen

$$x_n = 1 + \frac{7 - 2^{n+1}}{3^n}.$$

b) Anta at vi simulerer (løser numerisk) differensligningen (1) ved hjelp av flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen $\{\bar{x}_n\}$ oppføre seg for store verdier av n? Forklar hvorfor.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi studere Taylorpolynomene til logaritmefunksjonen om punktet $a = 1$.

a) Bestem Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \ln x$ om punktet $a = 1$ og bruk dette til å regne ut en tilnærming til $\ln 1.1$.

b) La $T_n f(x)$ betegne Taylorpolynomet til f av grad n om $a = 1$, og la $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ betegne restleddet. Vis at restleddet kan skrives som

$$R_n f(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} c^{-n-1},$$

der c er et tall i intervallet $(1, x)$.
Vi ønsker å bruke $T_n f$ til å regne ut en tilnærmet verdi av $\ln 1.1$. Finn en verdi av n slik at feilen garantert er mindre enn 10^{-10} i tallverdi.
Hint: Her kan du få bruk for Lagranges versjon av restleddet som sier at om vi Taylorutvikler om a så kan feilleddet skrives som

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Her er c er et tall i intervallet (a, x)

Oppgave 3. Teksten $\boldsymbol{x} = BAAAAAAAAA$ er gitt og skal kodes på en kompakt måte.

a) Kod teksten $\boldsymbol{x}$ med Huffman-koding. Hvor mange bit består koden av?

b) Kod teksten $\boldsymbol{x}$ med aritmetisk koding og vis at den aritmetiske koden ligger i intervallet $I = [a, b)$ der

$$a = 0.9, \quad b = 0.9 + \frac{9^9}{10^{10}}.$$

Finn tallet på formen $j/2^n$ med minst mulig n som ligger i I, og bestem fra dette en koding av teksten $\boldsymbol{x}$. Hvor mange bit består koden av?

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4. Vi har gitt en differensialligning med tilhørende randverdier på intervallet $[0, 1]$,

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

der α er en reell konstant. Legg merke til at vi har gitt en randbetingelse ved $x = 0$ og en ved $x = 1$.
Finn løsningen.
Finnes det verdier av α slik at løsningen ikke eksisterer?

Ekstraoppgaver

Oppgave 5. En følge er gitt ved differensligningen $x_n = x_{n-1}/2 + (n+1)/n$ for $n \geq 1$, der $x_0 = 2$. Vis ved induksjon at $2 \leq x_n \leq 3$ for alle heltall $n \geq 0$.

Oppgave 6.
a) Finn parabelen p som interpolerer funksjonen f i punktene $x = 0$, $x = h$ og $x = 2h$ (parabelen tilfredstiller altså betingelsene $p(0) = f(0)$, $p(h) = f(h)$ og $p(2h) = f(2h)$).
Deriver p og utled tilnærmingen $\delta(f)$ til $f'(0)$ gitt ved

$$f'(0) \approx \delta(f) = \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h}.$$

b) Vis at feilen i denne tilnærmingen er gitt ved

$$\left|f'(0) - \delta(f)\right| \leq h^2 \max_{x \in [0,2h]} \left|f'''(x)\right|.$$

Hint: I denne oppgaven kan du bruke at feilleddet i Taylors formel kan skrives

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

der ξ er et tall i intervallet $[a, x]$.

Lykke til!