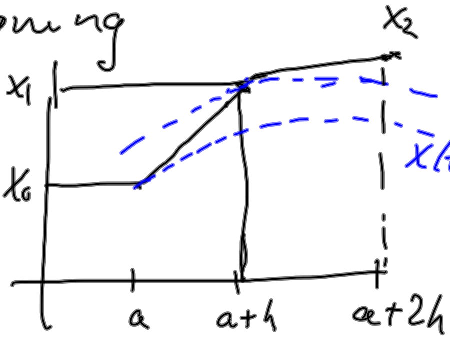
Eulers metode (13.3 i Komp).

Vi har en differensialligning

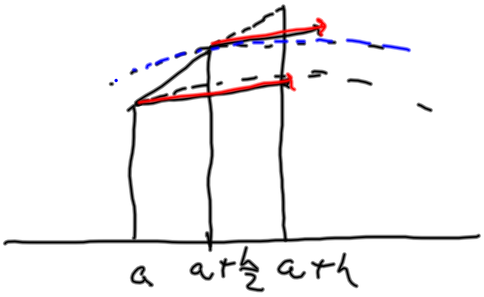
$x' = f(t, x)$, $x(a) = x_0$

I Eulers metode følger vi tangenten for å komme fra en tilnærming til den neste. Hvis hvert steg langs t-aksen har lengde h er feilen $x(t_k) - x_k$ proporsjonal med h.



Euler midtpunkt

I Euler midtpkt følger vi tangenten i a bort til $a + \frac{h}{2}$, regner ut tangent i dette punktet, trekker den til bake til a og følger denne til $a+h$.



Global feil er proporsjonal med h^2.

Algoritme:

$$\left.\begin{aligned} x_{k+\frac{1}{2}} &= x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+1/2}\right) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Hvordan kan vi generalisere Eulers metode?

I Euler følger vi tangenten, altså Taylor polynom av grad 1, kan vi følge Taylor polynom av grad 2?

Eksempel: $x' = t + x^2$, $x(a) = x_0$

Kan vi regne ut kvadratisk Taylor-polynom i a?

x_0 $\quad a + x_0^2$

$$P_2(t) = x(a) + (t-a)\,x'(a) + \tfrac{1}{2}(t-a)^2 x''(a)$$

For å finne $x''(a)$ trenger vi $x''(t)$.

Fra $x'(t) = t + x(t)^2$ får vi

$$x''(t) = 1 + 2\,x(t)\cdot x'(t)$$

Dermed er $x''(a) = 1 + 2\,x(a)\,x'(a)$

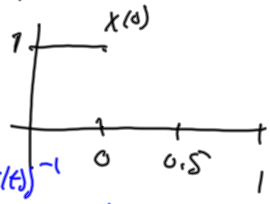
$$= 1 + 2\,x_0\,(a + x_0^2)$$

Eksempel 13.24 i komp.

$x' = f(t, x) = t - \frac{1}{1+x}$, $x(0) = 1$.

Skal løse på $[0, 1]$ ved å ta to steg med $h = 0{,}5$. Altså finne appr. i 0.5 og 1.

Bruk kvadratisk Taylor.



Må finne $x''(t)$.

$x'(t) = t - \frac{1}{1+x(t)} = t - (1+x(t))^{-1}$

$x''(t) = 1 + (1+x(t))^{-2} x'(t) = 1 + \frac{x'(t)}{(1+x(t))^2}$

$x'' = 1 + \frac{x'}{(1+x)^2}$

Fra $x_0 = x(0) = 1$ får vi $x_0' = x'(0) = 0 - \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

$x_0'' = x''(0) = 1 + \frac{x'(0)}{(1+x(0))^2} = 1 + \frac{(-1/2)}{(1+1)^2} = \frac{7}{8}$

Skal følge 2. grad Taylor fra $t=0$ til $t = 1/2$.

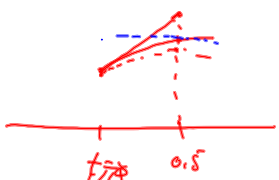
$P_2(t) = x(0) + t\, x'(0) + \frac{t^2}{2} x''(0)$

$= 1 + t\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{t^2}{2}(7/8)$

$= \underbrace{1 - \frac{1}{2}t + \frac{7}{16}t^2}_{x_1}$

$P_2(0{,}5) \approx 0.859375 \approx x(0{,}5)$

Har funnet x_1. Da kan vi finne x_1' og x_1'' ved å sette inn i uttrykkene for $x'(t)$ og $x''(t)$.



$x'(t) = t - \frac{1}{1+x(t)}$, $x''(t) = 1 + \frac{x'(t)}{(1+x(t))^2}$

$x_1' = 0{,}5 - \frac{1}{1+x_1} \cong -0{,}03781512$6

$x_1'' = 1 + \frac{x_1'}{(1+x_1)^2} = 0{,}98906216$

Får parabelen

$\hat{P}_2(t) = x_1 + (t - 0{,}5)\, x_1' + \frac{1}{2}(t-0{,}5)^2 x_1''$

$\hat{P}_2(1) = x_1 + 0{,}5\, x_1' + \frac{1}{8} x_1''$

$\approx 0{,}96410021$