Numeriske integrasjonsformler med feil

Knut Mørken

16. november 2014

Dette notatet er analogt til notatet om numerisk derivasjon og oppsummerer de tre metodene for numerisk integrasjon som er beskrevet i kapittel 12 i kompendiet.

Metodene for numerisk integrasjon kan utledes på samme måte som metodene for numerisk derivasjon. Forskjellen er at for integrasjon utleder vi først en metode for å integrere en funksjon f på et intervall $[a,b]$ ved hjelp av interpolasjon av et polynom som tilnærmer f. Vi integrerer dette polynomet og får dermed en tilnærming til integralet av funksjonen f. Deretter deler vi intervallet $[a,b]$ i delintervaller og anvender metoden vi utledet på hvert av delintervallene.

På samme måte analyserer vi først feilen når vi bare bruker ett intervall. Når vi bruker den numeriske metoden på mange delintervaller blir den totale feilen begrenset av summen av feilene på hvert delintervall.

Her er en oppsummering av de tre metodene for å beregne integralet av f fra a til b der vi deler $[a,b]$ i n like store deler av bredde $h=(b-a)/n$. Merk at $x_i = a + ih$ og $x_{i-1/2} = a + (i-1/2)h$.

Formel	Feil ≤
$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$	$(b-a)\frac{h^2}{24}\max_{x\in[a,b]}\left\lvert f''(x)\right\rvert$
$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$	$(b-a)\frac{h^2}{6}\max_{x\in[a,b]}\left\lvert f''(x)\right\rvert$
$\int_a^b f(x)\,dx \approx$ $\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right)$	$(b-a)\frac{h^4}{180}\max_{x\in[a,b]}\left\lvert f^{(iv)}(x)\right\rvert$