UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 12. oktober 2016.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1. Det desimale tallet 219 representeres i totallssystemet som

A: $1101\ 0111_2$

B: $1010\ 1011_2$

C: $1101\ 1010_2$

D: $1110\ 0111_2$

✓**E:** $1101\ 1011_2$

Løsningsforslag. Bruk algoritme 3.7 i kompendiet.

Oppgave 2. I 16-tallsystemet blir det binære tallet $110\ 1110.01011_2$ skrevet som

✓**A:** $6e.58_{16}$

B: $7f.68_{16}$

C: $5e.66_{16}$

D: $6e.56_{16}$

E: $6e.78_{16}$

Løsningsforslag. Oversett fire og fire binære sifre til ett heksadesimalt, start rundt binærpunktet. For eksempel er

$$1110_2 = 8 + 4 + 2 = 14 = e_{16}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Tallet 401_5 i 5-tallsystemet representerer det desimale tallet

A: 41

B: 51

C: 111

✓**D:** 101

E: 91

Løsningsforslag.

$$401_5 = 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 = 100 + 1 = 101.$$

Oppgave 4. Det rasjonale tallet 5/6 kan skrives i 2-tallsystemet som

A: $0.1111\ 0011\ 0011\cdots_2$ der sifrene 0011 gjentas uendelig mange ganger

B: $0.1101\ 0011\ 0011\cdots_2$ der sifrene 0011 gjentas uendelig mange ganger

✓**C:** $0.1101\ 0101\ 0101\cdots_2$ der sifrene 0101 gjentas uendelig mange ganger

D: $0.1111\ 1011\ 1011\cdots_2$ der sifrene 1011 gjentas uendelig mange ganger

E: $0.1111\ 0101_2$

Løsningsforslag.
Denne oppgaven løses nok enklest ved å gjennomføre algoritme 3.16 i kompendiet.

Oppgave 5. Tallet 3313_4 i 4-tallsystemet skrives i 2-tallsystemet som

✓**A:** $1111\ 0111_2$

B: $1101\ 0011_2$

C: $1111\ 1011_2$

D: $1111\ 0011_2$

E: $1101\ 0111_2$

Løsningsforslag. Å konvertere fra 4-tallsystemet til 2-tallsystemet er analogt til det å konvertere fra 16-tallsystemet til 2-tallsystemet, bare at her konverteres hvert siffer i 4-tallsystemet til to sifre i 2-tallsystemet. Skrevet ut i detalj:

$$\begin{aligned}3313_4 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 3 &= (1 \cdot 2 + 1)2^6 + (1 \cdot 2 + 1)2^4 \\ &\qquad + (0 \cdot 2 + 1)2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1111\ 0111_2.\end{aligned}$$

Oppgave 6. Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

✓**A:** Tallet 3/11 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 165-tallsystemet

B: Det rasjonale tallet 7/10 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 6-tallsystemet

(Fortsettes på side 3.)

C: Det rasjonale tallet 3/7 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 16-tallsystemet

D: I 60-tallsystemet kan alle rasjonale tall med nevner 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 representeres med en endelig sifferutvikling

E: Det rasjonale tallet 5/12 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 9-tallsystemet

Løsningsforslag. Dette følger fra Lemma 3.22 i kompendiet siden $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$.

Oppgave 7. Tallet

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}$$

er

✓**A:** -3

B: 1

C: 0

D: 2

E: irrasjonalt

Løsningsforslag. Hvis vi trekker sammen får vi

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} = \frac{1-\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4}{1+\sqrt{2}} = -\frac{3+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -3.$$

Oppgave 8. Hva er største nedre skranke for mengden

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ og } 1 < \tan x < 2\}?$$

A: 0

B: $\pi/2$

✓**C:** $\pi/4$

D: $\pi/6$

E: 1

Løsningsforslag. Største nedre skranke er gitt ved tallet som tilfredstiller $\tan x = 1$, altså $\arctan 1 = \pi/4$.

Oppgave 9. Multiplikasjonen $11_6 \cdot 13_6$ (der begge tallene er representert i 6-tallsystemet) gir som resultat

A: 131_6

B: 141_6

✓**C:** 143_6

D: 133_6

E: 123_6

Løsningsforslag. Det enkleste og tryggeste er nok å gjøre om de to tallene til 10-tallsystemet, gange sammen, og så konvertere til 6-tallsystemet.

$$11_6 \cdot 13_6 = 7 \cdot 9 = 63 = 36 + 24 + 3 = 1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0.$$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. For hvilken verdi av $\beta > 3$ har vi $2_\beta \cdot 23_\beta = 101_\beta$ (der alle tallene er representert i β-tallsystemet)?

A: $\beta = 4$

✓**B:** $\beta = 5$

C: $\beta = 6$

D: $\beta = 7$

E: $\beta = 8$

Løsningsforslag. Relasjonen sier at

$$2 \cdot (2\beta + 3) = \beta^2 + 1$$

eller

$$\beta^2 - 4\beta - 5 = 0$$

som har løsningene $\beta = -1$ og $\beta = 5$. Det er bare den siste løsningen som gir mening.

Oppgave 11. Vi tilnærmer et tall a med et tall $\tilde{a}$ og den relative feilen blir 0.000047. Omtrent hvor mange sifre vil i så fall a og $\tilde{a}$ ha felles?

A: 1

B: 3

✓**C:** 5

D: 7

E: Ingen

Løsningsforslag. Den relative feilen er 4.7×10^{-5}. Da vet vi fra observasjon 5.20 at a og $\tilde{a}$ har omtrent 5 felles sifre.

Oppgave 12. Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for flyttall med liten absoluttverdi?

A: $x + x^3$

✓**B:** $1 - 1/(1 + x)$

C: $x + \sin x$

D: $x^4 - x^2$

E: $\sqrt{x^2 + 2} + x^4$

Løsningsforslag. Uttrykket i (B) er det eneste som fører til subtraksjon av to nesten like tall for små verdier av x.

Oppgave 13. Hvilken av følgende differensligninger er lineær, inhomogen og av tredje orden?

A: $x_{n+1} + 2x_n = 3$

B: $x_{n+2} + x_{n+1}x_nx_{n+3} = 1$

C: $x_{n+4} + x_{n+2} + 3x_{n+1} - nx_n = \cos n$

✓**D:** $x_{n+3} + nx_{n+1} - x_n = 4$

E: $x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n = 0$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 14. Differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = 2^n,\ n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 1$ har løsningen

A: $x_n = n + 1$

✓**B:** $x_n = 2^n$

C: $x_n = (n+1)2^n$

D: $x_n = (n^2+1)2^n$

E: $x_n = 1/(n+1)$

Løsningsforslag. Vi ser at løsningen av den homogene ligningen er $x_n^h = C$. Prøver vi med en partikulærløsning på formen $x_n^p = A2^n$ og setter inn får vi relasjonen $A2^{n+1} - A2^n = 2^n$ eller $2A - A = 1$. Altså er $A = 1$. Den generelle løsningen er derfor

$$x_n = C + 2^n.$$

Startverdien gir da $1 = x_0 = C + 1$, altså $C = 0$.

Oppgave 15. For hvilken verdi av a har ligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = -n, \quad n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = a$ løsningen $x_n = n + 1$?

A: $a = 1/2$

B: $a = -2$

C: $a = -1$

D: $a = 0$

✓**E:** $a = 1$

Løsningsforslag. Hvis $x_n = n + 1$ ser vi at $x_0 = 1$. Altså er (E) riktig.

Oppgave 16. Differensligningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 4$$

har løsningen

A: $x_n = 4(n+1)$

✓**B:** $x_n = 1 - (-3)^n$

C: $x_n = 4n$

D: $x_n = n2^{n+1}$

E: $x_n = 8n/(n+1)$

Løsningsforslag. Den karakteristiske ligningen $r^2 + 2r - 3 = 0$ har løsningene $r_1 = -3$ og $r = 1$. Vi ser at den eneste løsningen som kombinerer disse røttene på riktig måte er (B), og den passer også med de to startverdiene.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 17. En partikulærløsning av ligningen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = -2$$

er

A: $x_n = n^2$

✓**B:** $x_n = n$

C: $x_n = -2$

D: $x_n = -1$

E: $x_n = 0$

Løsningsforslag. Vi ser $x_n = 1$ er en løsning av den homogene ligningen og denne er på samme form som høyresiden. Derfor må vi øke graden på partikulærløsningen og prøve med $x_n^p = An$. Setter vi inn får vi relasjonen

$$A(n+2) - 4A(n+1) + 3An = -2.$$

Trekker vi sammen og løser faller n-leddene og vi får $A = 1$.

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$5x_{n+2} - 11x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1, x_1 = 1/5$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: $1/5^n$ og så underflow (0)

✓**B:** $C2^n$ og så overflow. Her er C en passende konstant

C: $1/5^n$

D: 2

E: 1

Løsningsforslag. Den karakteristiske ligningen $5r^2 - 11r + 2 = 0$ har løsningene $r_1 = 1/5$ og $r_2 = 2$, så den generelle løsningen er

$$x_n = C5^{-n} + D2^n.$$

Ved simulering vil det alltid bli avrundingsfeil siden vi må dividere med tallet 5 som ikke kan representeres eksakt med flyttall. Dette svarer til at konstanten D aldri blir eksakt 0, noe som fører til at det andre leddet før eller siden vil dominere og etterhvert gi overflow.

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{5}{6}x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n = 1/3, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 3, x_1 = 11/6$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: $\bar{x}_n = 0$

B: $\bar{x}_n = 2^n$ og deretter overflow

✓**C:** $\bar{x}_n = 1$

D: $\bar{x}_n = 1 + 2^{-n} + 3^{-n}$

E: $\bar{x}_n = 1 + 2^{-n} + 3^{-n}$ og deretter underflow

(Fortsettes på side 7.)

Løsningsforslag. Den karakteristiske ligningen har røttene $r_1 = 1/2$ og $r_2 = 1/3$ så den homogene løsningen er

$$x_n^h = C2^{-n} + D3^{-n}$$

og den endelige løsningen blir

$$1 + 2^{-n} + 3^{-n}.$$

Simulering vil aldri kunne svare til at koeffisientene C og D er nøyaktig 1, men det gjør ingenting siden de to leddene 2^{-n} og 3^{-n} etterhvert dør ut og domineres fullstendig av den partikulære løsningen $x_n^p = 1$.

Oppgave 20. For hvert naturlige tall n lar vi P_n betegne påstanden

$$P_n: \ 11^n - 6 \text{ er delelig med } 5.$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle naturlige tall kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.
2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at da er også P_{k+1} sann. Siden P_k er sann vet vi at $11^k = 5m + 6$ for et passende naturlig tall m. Vi ser da at

$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 6 &= 11 \cdot 11^k - 6 \\ &= 11(5m+6) - 6 \\ &= 55m + 60 \\ &= 5(11m + 12) \end{aligned}$$

   Altså er også $11^{k+1} - 6$ delelig med 5 så P_{k+1} er sann om P_k er sann. Dermed er påstanden P_n sann for alle naturlige tall n.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for $n \geq 1$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

B: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

C: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

✓**D:** Påstanden P_n er riktig for alle $n \geq 1$ og induksjonsbeviset er riktig

E: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Løsningsforslag. Her skal det ikke være noen feil.

Det var det!