UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 15. Desember 2017.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.1: $1 + 3(x-1)$
Oppgave 1.2: $2(x-1) - \frac{4}{3}(x-1)^3$
Oppgave 1.3: $1 + x + \frac{1}{2}x^2$
Oppgave 1.4: $y(x) = xe^{-3x}$
Oppgave 1.5: $e^{x+x^2} - 1$
Oppgave 1.6: $p_3(-1) = 4$
Oppgave 1.7: 1
Oppgave 1.8: Alle polynomer av grad ≤ 2, men ikke for alle polynomer av grad ≤ 3.
Oppgave 1.9: 17/4
Oppgave 1.10: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -te^{x_2+t} + x_1, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0$

Oppgave 2.1

Bruk induksjon på n til å vise at $1 + nx \leq (1+x)^n$ for alle $n \geq 0$ og $x \geq -1$. Hint: Start med å skrive $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$.

Løsning. I eksamenssettet burde det stått $x > -1$ i stedet for $x \geq -1$, siden $x = -1$ og $n = 0$ gir 0^0 på høyresiden, som er udefinert. Ingen trekk for å ikke kommentere dette.

Vi sjekker først tilfellet $n = 0$. Da har vi 1 på venstre side, og $(1+x)^0$ på høyre side. For $x > -1$ så er $1 + x \neq 0$, slik at $(1+x)^0 = 1$, så påstanden stemmer.

Anta så at vi har vist at induksjonspåstanden er sann for $n = 0, \ldots, k$. Spesielt har vi da at $1 + kx \leq (1+x)^k$. Bruker vi dette sammen med hintet får vi at

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x).$$

Her brukte vi også at $x > -1$, som medfører at $1 + x > 0$, noe som gjør at vi ikke trenger å snu ulikheten $(1+x)^k \geq (1+kx)$ når vi ganger med $1 + x$

(Fortsettes på side 2.)

på begge sider. Vi får nå at

$$(1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x,$$

siden $kx^2 \geq 0$. Til sammen gir dette at $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$ slik at induksjonspåstanden er sann også for $n = k + 1$.

Oppgave 2.2

I denne oppgaven skal vi tilnærme integralet

$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$

som enkelt kan beregnes eksakt til verdien 2.

a) Bruk midtpunktmetoden med fire delintervaller til å tilnærme integralet og skriv ned hvor stor feilen blir (sammenlignet med eksakt verdi). En øvre grense for absolutt-feilen i midtpunktmetoden på intervallet $[a, b]$ er

$$(b - a)\frac{h^2}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Bruk dette uttrykket til å finne ut hvor mange delintervaller som er tilstrekkelig for å sikre at feilen blir mindre enn 10^{-2}.

Løsning. De fire delintervallene som brukes i midtpunktmetoden er $[0, \pi/4]$, $[\pi/4, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/4]$ og $[3\pi/4, \pi]$. Dette gir tilnærmingen

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{4}(f(\pi/8) + f(3\pi/8) + f(5\pi/8) + f(7\pi/8))\\ &= \frac{\pi}{4}(\sin(\pi/8) + \sin(3\pi/8) + \sin(5\pi/8) + \sin(7\pi/8)) \approx 2.0523.\end{aligned}$$

Den absolutte feilen i tilnærmingen er dermed $|2.0523 - 2| = 0.0523$.

For å estimere hvor mange delintervaller vi trenger for å få feilen mindre enn 10^{-2} må vi finne en øvere grense for den andrederiverte. Siden $f''(x) = -\sin x$ ser vi at $|f''(x)| \leq 1$ for alle x Dermed får vi at feilen er begrenset av

$$(b - a)\frac{h^2}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq \pi\frac{h^2}{24}.$$

Om vi skal ha $\pi\frac{h^2}{24} \leq 10^{-2}$ må $h^2 \leq 0.24/\pi$ som betyr at vi må ha $h \leq \sqrt{0.24/\pi} \approx 0.2764$. Siden $(b - a)/h \approx 11.3661$ for denne verdien av h, så betyr dette at vi må velge mint 12 delintervaller.

b) Alternativt kan integralet tilnærmes ved å erstatte $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad n om midtpunktet $a = \pi/2$, det vil si tilnærmingen

$$\int_0^\pi \sin x \; dx \approx \int_0^\pi T_n \sin x \; dx.$$

Bruk restleddet i Taylors formel til å vise at den absolutte feilen blir mindre enn 10^{-2} dersom $n \geq 5$. Regn ut integralet analytisk, og finn den faktiske feilen du får med denne metoden.

(Fortsettes på side 3.)

Løsning. Restleddet i Taylors formel er gitt ved

$$R_n \sin x = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-\pi/2)^{n+1}$$

og dermed har vi

$$|R_n \sin x| \leq \frac{|x-\pi/2|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Feilen blir derfor

$$\begin{aligned}\int_0^\pi R_n \sin x dx &\leq \frac{1}{(n+1)!}\int_0^\pi |x-\pi/2|^{n+1} dx \\ &= \frac{1}{(n+2)!}[(x-\pi/2)^{n+2}]_0^\pi = \frac{2(\pi/2)^{n+2}}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

For $n = 5$ gir dette at feilen er begrenset av omtrent 0.0094 som er mindre enn 10^{-2}, og for større verdier av n blir verdien enda mindre.

Taylorpolynomet til $\sin x$ om $a = \pi/2$ av grad 5 blir

$$T_5 \sin x = 1 - (x-\pi/2)^2/2 + (x-\pi/2)^4/4!$$

og vi får dermed tilnærmingen

$$\begin{aligned}\int_0^\pi T_5 \sin x dx &= \int_0^\pi (1-(x-\pi/2)^2/2 + (x-\pi/2)^4/4!)dx \\ &= \left[(x-\pi/2) - (x-\pi/2)^3/3! + (x-\pi/2)^5/5!\right]_0^\pi \\ &= 2(\pi/2 - (\pi/2)^3/3! + (\pi/2)^5/5!) \approx 2.0090,\end{aligned}$$

slik at den faktiske feilen er 0.009.

Oppgave 2.3 (kun for MAT-INF1100)

Vi har gitt differensligningen

$$4x_{n+2} - 8x_{n+1} + 3x_n = -4.$$

a) Vis at den generelle løsningen av differensligningen er $x_n = 4 + C(1/2)^n + D(3/2)^n$ for konstanter C og D.

Løsning. Den karakteristiske ligningen blir $4r^2 - 8r + 3 = 0$, som har røttene

$$r = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}$$

eller $r_1 = 1/2$ og $r_2 = 3/2$. Den generelle løsningen av den homogene ligningen blir dermed

$$x_n^h = C(1/2)^n + D(3/2)^n.$$

For å finne en partikulær løsning ser vi at høyresiden er konstant og prøver dermed med en løsning på formen $x_n^p = A$. Setter vi inn i ligningen får vi $4A - 8A + 3A = -A = -4$, slik at $A = 4$. Den generelle løsningen blir dermed

$$x_n = x_n^p + x_n^h = 4 + C(1/2)^n + D(3/2)^n.$$

b) Finn løsningen på differensligningen med initialkravene $x_0 = 5$ og $x_1 = 9/2$. Hvordan utvikler løsningen seg for store n når du simulerer differensligningen med disse initialkravene på en datamaskin?

(Fortsettes på side 4.)

Løsning. Med initialbetingelsen $x_0 = 5$ og $x_1 = 9/2$ får vi ligningene

$$4 + C + D = 5$$
$$4 + \frac{1}{2}C + \frac{3}{2}D = 9/2,$$

eller

$$C + D = 1$$
$$C + 3D = 1.$$

Fra dette finner vi at $D = 0$ og $C = 1$ slik at løsningen blir

$$x_n = 4 + (1/2)^n.$$

For denne differensligningen kan intialbetingelsene representeres eksakt i totallssystemet, og det skjer heller ingen avrundingsfeil ved utregning av neste ledd ved hjelp av formelen

$$x_{n+2} = (-4 + 8x_{n+1} - 3x_n)/4$$

siden vi alltid dividerer med 4. Derfor vil det ikke skje noen avrundingsfeil ved simulering av ligningen.

Resonnementet over er nok til å få full uttelling på oppgaven, selv om dette ikke er hele historien her. Når n blir stor nok vil nemlig $4 + (1/2)^n$ til slutt bli rundet av til 4, og fra da av vil en avrundingsfeil snike seg inn liikevel. Når dette skjer så vil et lite bidrag fra roten 3/2 gjøre seg gjeldende, slik at de simulerte verdiene går mot uendelig. Et simuleringsprogram vil da før eller siden gi overflow og deretter `Nan`.

Oppgave 2.3 (kun for MAT-IN1105)

Vi minner om at den symmetriske Newton-kvotienten er definert ved

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

og gir en tilnærming til $f'(a)$.

Skriv en funksjon **symm_newton()** som regner ut den symmetriske Newton-kvotienten for funksjonen $f(x) = e^x$ og $a = 1$, og der h løper gjennom verdiene 10^{-1}, 10^{-2},...,10^{-15} i en for-løkke. Funksjonen skal returnere den verdien av den symmetriske Newton-kvotienten som gir minst avvik fra $f'(a)$.

Oppgave 2.4 (kun for MAT-IN1105)

Skriv en testfunksjon som kaller funksjonen **symm_newton()**, og sjekker om den returnerte verdien avviker fra $f'(a)$ med mindre enn 10^{-3}. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen **test_*()**, og gjøre testen ved hjelp av en assert).

(Fortsettes på side 5.)

```
from math import *

def symm_newton():
    h = 10**(-1)
    val = (exp(1+h)-exp(1-h))/(2*h)
    bestval = val # The variable which holds the best approximation
    dfda = exp(1) # Exact value of f'(a)
    for k in range(2,16):
        h = 10**(-k)
        val = (exp(1+h)-exp(1-h))/(2*h)
        if abs(val - dfda) < abs(bestval - dfda):
            bestval = val # Update the best approximation
    return bestval

def test_newton():
    bestval = symm_newton()
    dfda = exp(1) # Exact value of f'(a)
    assert abs(bestval - dfda) <= 10**(-3), \
        'Too big deviation from df/da: %f' % (bestval - exp(1))

if __name__ == '__main__':
    test_newton()
```

Oppgave 2.4 (MAT-INF1100), 2.5 (MAT-IN1105)

a) En sylinderformet vanntank med tverrsnitt 1 kvadratmeter har ved tiden t en vannhøyde på $y(t)$ meter, slik at volumet vann i tanken ved tiden t kan skrives som $y(t)$ kubikkmeter. Vannhøyden ved tiden $t = 0$ er lik 1 meter. Tanken lekker vann ut av et hull med tverrsnitt a som sitter nederst. Vannets hastighet ut av hullet er på $\sqrt{2gy(t)}$ meter per sekund, der g er en konstant (gravitasjonskonstanten).
Forklar først at endring av volumet per tidsenhet kan skrives som $y'(t)$ og deretter at vannhøyden tilfredstiller en differensialligning på formen

$$y'(t) = -K\sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 1,$$

der $K = a\sqrt{2g}$.
Løs differensiallikningen analytisk og finn et uttrykk for hvor lang tid det tar før tanken er tom.

Løsning. Siden $y(t)$ er volum og $y'(t)$ er grenseverdien til $(y(t + \Delta t) - y(t))/\Delta t$ når Δt går mot 0, så er det klart at $y'(t)$ representerer endringen i volum per tidsenhet ved tidspunkt t (differansen $y(t+\Delta t)-y(t)$ er jo endring i volum).
På ett sekund synker vannet med $\sqrt{2gy(t)}$ meter, slik at vannet som forsvinner har volum $a\sqrt{2gy(t)}$ (grunnflate ganget med høyde). Dette betyr at

$$y'(t) = -a\sqrt{2g}\sqrt{y(t)} = -K\sqrt{y(t)}$$

med $K = a\sqrt{2g}$.

(Fortsettes på side 6.)

For å løse ligningen observerer vi at den er separabel siden vi kan skrive den som $y'(t)/\sqrt{y(t)} = -K$. Integrerer vi begge sider får vi at

$$2\sqrt{y} = -Kt + C.$$

Siden $y(0) = 1$ får vi $C = 2$. Det betyr at $2\sqrt{y} = -Kt + 2$ så $y(t) = (1 - Kt/2)^2$. Tanken er tom når $y(t) = 0$, det vil si når $t = 2/K$.

b) Anta at $K = 10^{-2}$. Bruk to steg med henholdsvis Eulers metode og Eulers midtpunktsmetode til å regne ut tilnærminger til $y(200)$.

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Løsning. Med $K = 10^{-2}$ får vi $y'(t) = -10^{-2}\sqrt{y(t)}$. La oss omdøpe $y(t)$ til $x(t)$ slik vi er vant til ved bruk av Eulers metode. Da er høyresiden i differensialligningen $f(t, x) = -10^{-2}\sqrt{x}$. Ett steg med Euler (med $h = 100$) gir

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 - 100 \times 10^{-2}\sqrt{1} = 1 - 1 = 0.$$

Neste steg gir da

$$x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1) = 0 - 100 \times 10^{-2}\sqrt{0} = 0.$$

Med Eulers midtpunktsmetode regner vi først ut

$$x_{1/2} = x_0 + hf(t_0, x_0)/2 = 1 - 50 \times 10^{-2}\sqrt{1} = 1 - 0.5 = 0.5,$$

og deretter

$$x_1 = x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}) = 1 - 100 \times 10^{-2}\sqrt{0.5} = 1 - \sqrt{0.5} \approx 0.2929.$$

I andre steg regner vi først ut

$$x_{3/2} = x_1 + hf(t_1, x_1)/2 = x_1 - 0.5\sqrt{x_1} \approx 0.0223,$$

og deretter

$$x_2 = x_1 + hf(t_{3/2}, x_{3/2}) = x_1 - \sqrt{x_{3/2}} \approx 0.1436.$$