MAT-INF1100 Sammendrag

Øivind Gylver (oivindgy@fys.uio.no), 21. november 2013
Med forbehold om feil.

Differenslikninger

Simulering på datamaskin: Dersom vi skal undersøke oppførselen ved simulering, må vi bl.a. undersøke om init.bet. kan representeres eksakt. Hvis f.eks. $x_0 = 2/3$, får vi en liten feil ϵ slik at $\tilde{x}_0 = 2/3 + \epsilon$. Vi må da beregne og undersøke løsningen med $\tilde{x}_0$ som initialbetingelse.
Eksakte tall: Hvis vi har et rasjonalt tall $a = b/c$, kan a representeres eksakt i totallssystemet (datamaskin) dersom c kan skrives på formen 2^n der $n = 1, 2, \ldots$.

Førsteordens (lineære)

$$x_{n+1} = r x_n \quad \Rightarrow \quad x_n = C r^n$$

Annenordens, homogene med konstante koeffisienter

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

der b,c er kjente reelle koeffisienter. Karakteristisk polynom

$$r^2 + br + c = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Én reell rot } r: &\quad x_n = Cr^n + Dnr^n \\
\text{To reelle røtter } r_1, r_2: &\quad x_n = Cr_1^n + Dr_2^n \\
\text{To komplekse røtter } r, \bar{r}: &\quad x_n = Cr^n + \overline{C}\bar{r}^n \\
\text{evt.} &\quad x_n = E\rho^n \cos(n\theta) + F\rho^n \sin(n\theta) \\
&\quad \rho \text{ er modulus, } \theta \text{ er argument til } r \\
&\quad r = a + ib, \bar{r} = a - ib
\end{aligned}$$

Annenordens, inhomogene med konstante koeffisienter

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$$

har løsning $x_n = x_n^p + x_h^h$ der x_n^p (partikulær) og x_n^h (homogen). Gjetter x_n^p,
Regel 1: $f(n)$ = polynom $\Rightarrow x_n^p$ = polynom (lik grad, evt. gå opp én/to grader).
Regel 2: $f(n) = a^n P(n)$ der $P(x)$ er et polynom $\Rightarrow x_n^p = a^n Q(n)$ der Q er et polynom av samme grad som P (evt. gå opp én eller to grader).
Regel 3: 1) $f(n) = b^n[A\sin(an) + B\cos(an)] \Rightarrow x_n^p = b^n[C\sin(an) + D\cos(an)]$ 2) $x_n^p = nb^n[C\sin(an) + D\cos(an)]$ hvis $x_n^h = b^n\cos(an)$ eller $x_n^h = b^n\sin(an)$.

Taylorpolynomer

Brukes til å tilnærme $f(x)$ omkring et punkt a (som vi er interessert i). Dette er nyttig fordi den tilnærmede funksjonen er enklere å regne med.

$$f(x) = \overbrace{T_n(f;a)(x)}^{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{R_n(f;a)(x)}^{\text{restledd}}$$

Taylorpolynomet T_n av grad n til f om punktet a, og restledd R_n:

$$T_n(f;a)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

$$R_n(f;a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$$

Feilen vi gjør følger uttrykket:

$$\overbrace{|f(x) - T_n(f;a)(x)|}^{\text{absolutt feil}} = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \epsilon \qquad c \in (a, x)$$

hvor ϵ er ønsket nøyaktighet. Vi trenger da et intervall for x vi ønsker å beregne feilen i. Tallet x velges fra intervallet slik at $\left|(x-a)^{n+1}\right|$ maksimeres og c velges slik at $|f^{(n+1)}(c)|$ maksimeres.

Polynom interpolasjon

Det å finne et polynom $p_n(x)$ av grad n som går gjennom $n+1$ gitte punkter kalles polynom interpolasjon. Dette er nyttig fordi vi da kan gjøre beregninger med $p_n(x)$.

Newtons form

$$\begin{aligned}
p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\
+ c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Konstantene c_k bestemmes gjennom dividerte differanser.

Dividerte differanser

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Sett opp tabell (for alle gitte punkter $(x_k, f[x_k])$):

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f[x_0] & \leftarrow c_0 & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & \leftarrow c_1 & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \leftarrow \ldots \\
x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Dividerte differenser
er ikke pensum H2018

Eksempel på utregning av to dividerte differanser:

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$c_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Teller: Vi tar verdien rett til venstre og trekker fra verdien over denne.
Nevner: $x_{\text{størst}} - x_{\text{minst}}$ av alle involverte x_k i teller.

Nullpunkter til funksjoner

Bisection metoden

Fortegnet til $f(x)$ skrives $\text{sgn}[f(x)]$. Dersom $I \subseteq [a,b]$ og $\text{sgn}[f(a)] \neq \text{sgn}[f(b)]$, finnes et nullpunkt $f(c) = 0$ der $c \in I$. Algoritme: (1) Beregn midtpunktet $m = (a+b)/2$ og finn $\text{sgn}[f(m)]$. (2) Hvis $\text{sgn}[f(m)] = \text{sgn}[f(a)] \Rightarrow I \subset [m,b]$ eller $\text{sgn}[f(m)] = \text{sgn}[f(b)] \Rightarrow I \subset [a,m]$. Repetér. Metoden garanterer å finne et nullpunkt med ønsket nøyaktiget.
Feil etter N iterasjoner (feilen halvveres for hver iterasjon):

$$|c - m_N| \leq \frac{b-a}{2^{N+1}}$$

Sekantmetoden

Ta sekanten mellom $(x_0, f(x_0))$ og $(x_1, f(x_1))$ og beregn dens nullpunkt x_2.
Ta sekanten mellom $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ og beregn nullpunkt x_3, osv.
Konvergens (ingen garanti): Antall riktige siffer øker med 62% per iteasjon.

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, N$$

Newtons metode

Ta tangenten til $f(x_0)$ og beregn dens nullpunkt x_1. Ta tangenten til $f(x_1)$ og beregn nullpunkt x_2, osv. Konvergens (ingen garanti): Antall riktige siffer dobles per iteasjon.

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Numerisk derivasjon

Newtons kvotientmetode

$$\overline{f'(x)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Total feil (summen av trunkerings- og avrundingsfeilen):

$$\overbrace{\left| \underbrace{f'(a)}_{\text{eksakt}} - \underbrace{\overline{f'(a)}}_{\text{tilnærmet}} \right|}^{\text{absolutt feil}} \leq \overbrace{\underbrace{\frac{h}{2}M_1}_{\text{trunkeringsfeil}} + \underbrace{\frac{2\epsilon^*}{h}M_2}_{\text{avrundingsfeil}}}^{\text{total feil}} \qquad (\epsilon^* = 7 \cdot 10^{-17})$$

$$M_1 = \max_{x \in [a, a+h]} \left|f''(x)\right| \quad \text{og} \quad M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|$$

Optimal steglengde h:

$$h^* = 2\sqrt{\frac{\epsilon^* M_2}{M_1}} \approx 2\sqrt{\frac{\epsilon^*|f(a)|}{|f''(a)|}}$$

Symmetrisk versjon av Newtons kvotientmetode

$$\overline{f'(a)} \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

$$\left|f'(a)-\overline{f'(a)}\right| \leq \frac{h^2}{6}M_1 + \frac{\epsilon^*}{h}M_2.$$
$$M_1 = \max_{x\in[a-h,a+h]}\left|f'''(x)\right| \quad \text{og} \quad M_2 = \max_{x\in[a-h,a+h]}|f(x)|\,.$$

$$h^* = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon^* M_2}{M_1}} \approx \sqrt[3]{\frac{3\epsilon^*|f(a)|}{|f'''(a)|}}$$

En firepunkt-metode

$$\overline{f'(a)} \approx \frac{f(a-2h)-8f(a-h)+8f(a+h)-f(a+2h)}{12h}$$

$$\left|f'(a)-\overline{f'(a)}\right| \lesssim \frac{h^4}{18}\left|f^{(v)}(a)\right| + \frac{3\epsilon^*}{h}|f(a)|$$

$$h^* = \sqrt[5]{\frac{27\epsilon^*|f(a)|}{2|f^{(v)}(a)|}}$$

Numerisk tilnærming til den annenderiverte

$$\overline{f''(a)} \approx \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

$$\left|f''(a)-\overline{f''(a)}\right| \leq \frac{h^2}{12}M_1 + \frac{3\epsilon^*}{h^2}M_2$$
$$M_1 = \max_{x\in[a-h,a+h]}\left|f^{(iv)}(x)\right| \quad \text{og} \quad M_2 = \max_{x\in[a-h,a+h]}|f(x)|$$

$$h^* = \sqrt[4]{\frac{36\epsilon^*|f(a)|}{|f^{(iv)}(a)|}}$$

Numerisk integrasjon

Numerisk integrasjon er lite sensitiv til avrundingsfeil, så alle feilestimater under baserer seg på trunkeringsfeil.

Midpunktsmetoden

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{\text{mid}}(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{1-1/2})$$
$$x_{1-1/2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a+(i-1/2)h$$

Lokal feil (a og b utgjør *ett* intervall):

$$\left|\overbrace{\int_a^b f(x)dx}^{\text{eksakt}} - \overbrace{hf(a_{1/2})}^{\text{tilnærmet}}\right| \leq \frac{h^3}{24}M$$
$$M = \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right| \quad \text{og} \quad a_{1/2} = (a+b)/2$$

Global feil (a og b utgjør *hele* integralet, h er steglengde for ett intervall):

$$|I - I_{\text{mid}}| \leq (b-a)\frac{h^2}{24}M$$

Optimal steglengde h:

$$h \leq \sqrt{\frac{24\epsilon}{(b-a)M}}$$

der ϵ er ønsket nøyaktighet.

Trapesmetoden

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{\text{trap}}(h) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Lokal feil:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}h\right| \leq \frac{h^3}{6}M$$
$$M = \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$$

Global feil:

$$|I - I_{\text{trap}}| \leq (b-a)\frac{h^2}{6}M$$

Simpsons metode

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{\text{simp}}(h) = \frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right)$$

Lokal feil:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}h\right| \leq \frac{h^5}{2880}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(iv)}(x)\right|$$

Global feil:

$$\left|I - I_{\text{simp}}\right| \leq (b-a)\frac{h^4}{180}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(iv)}(x)\right|$$

Numerisk løsning av differensiallikninger

Dette gjør oss i stand til enkelt å løse diffliknigner, også de vi ikke kan løse analytisk.

Eulers metode

For et intervall $[a,b]$ inndelt i n tidssteg og startverdier (t_0, x_0), kan vi iterere oss frem til løsningen $x(t_k) \approx x_k$ av en differensiallikning med algoritmen:

$$\begin{aligned}
&h = (b-a)/n \\
&t_0 = a \\
&\text{for } k = 0,1,\ldots,n-1 \\
&\quad x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) \\
&\quad t_{k+1} = a + (k+1)h
\end{aligned}$$

hvor $x' = f(t_n, x_n)$.

Lokal feil (for ett steg):

$$\frac{h^2}{2}\max_{t\in[a,b]}|x''(t)| = \frac{h^2}{2}D$$

Global feil i steg k:

$$|\epsilon_k| \leq h\frac{D}{2C}\left(e^{(t_k-a)C}-1\right) \leq h\frac{D}{2C}\left(e^{(b-a)C}-1\right)$$
$$C = \max_{t\in[a,b],x\in\mathbb{R}}|f_x(t,x)| \quad \text{og} \quad D = \max_{t\in[a,b]}\left|x''(t)\right|$$

Global feil er av 1. orden (proporsjonal med h), lokal feil er av 2. orden.

Eulers midtpunktsmetode

Samme som Eulers metode, men baserer seg på to steg per iterasjon.

$$\begin{aligned}
&h = (b-a)/n \\
&t_0 = a \\
&\text{for } k = 0,1,\ldots,n-1 \\
&\quad x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2 \\
&\quad x_{k+1} = x_k + hf(t_k + h/2, x_{k+1/2}) \\
&\quad t_{k+1} = a + (k+1)h
\end{aligned}$$

Global feil er av 2. orden (proporsjonal med h^2), lokal feil er av 3. orden.

Differensiallikninger

Førsteordens (lineære)

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

har løsning

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right)$$

hvor $F(x)$ er anti-derivert til $f(x)$ og $e^{F(x)}$ er integrerende faktor.

Annenordens, homogene med konstante koeffisienter

$$y''(x) + py'(x) + q = 0$$

der p, q er kjente reelle tall. Karakteriskisk polynom

$$r^2 + pr + q = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_1, r_2$$

$$\begin{aligned} \text{Én reell rot } r_1: \quad & y(x) = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x} \\ \text{To reelle røtter } r_1, r_2: \quad & y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} \\ \text{To komplekse røtter:} \quad & y(x) = e^{ax}\left(C\cos(bx) + D\sin(bx)\right) \\ & r_1 = a + ib, r_2 = a - ib \end{aligned}$$

Annenordens, inhomogene med konstante koeffisienter

$$y''(x) + py'(x) + qy = f(x)$$

har løsning $y = y_p + y_h$ der y_p (partikulær) og y_h (homogen). Gjetter y_p,
Regel 1: $f(x)$ = polynom $\Rightarrow$ y_p = polynom (lik grad, evt. gå opp én/to grader).
Regel 2: $f(x) = a^x P(x)$ der $a > 0$ og $P(x)$ et polynom $\Rightarrow$ $y_p = a^x Q(x)$ der Q er et polynom av samme grad som P (evt. gå opp én eller to grader).
Regel 3: 1) $f(x) = a^x[A\cos(bx) + B\sin(bx)] \Rightarrow y_p = a^x[C\cos(bx) + D\sin(bx)]$ 2) $y_p = xa^x[C\cos(bx) + D\sin(bx)]$ hvis $y_h = a^x\cos(bx)$ eller $y_h = a^x\sin(bx)$.

Separable differensiallikninger

Separerer alle y og alle x på hver sin side og integrerer:

$$q(y)y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad \int q(y)dy = \int p(x)dx$$

Systemer av differensiallikninger

Et system av differensiallikninger kan alltid skrives som et system av førsteordens likninger. Nyttig når vi f.eks. skal bruke Eulers metode for å løse koblede difflikninger.

Skriver likningen av p'te orden med løsning $x(t)$ på formen:

$$x^{(p)} = g\left(t, x, x', \ldots, x^{(p-1)}\right)$$

Omdøp $x \to x_1$. Systemet av p likninger med p ukjente funksjoner $x_1, x_2, \ldots, x_p$ er: $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3, \ldots, x_p' = g\left(t, x, x', \ldots, x^{(p-1)}\right)$.

Eksempel: (sett $x_1 = x$)

$$\begin{aligned} & x'' + \sin(tx') - x^2 = e^t \quad \Rightarrow \quad x'' = e^t - \sin(tx') + x^2 \\ & \left.\begin{aligned} & x_1' = x_2 \\ & x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_1^2 \end{aligned}\right\} \text{ System av 1. ordens likn.} \end{aligned} \tag{1}$$

Eulers metode med (1):

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + hx_{2,k} \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + hf(t_k, x_{1,k}, x_{2,k}) \\ t_{k+1} &= a + (k+1)h \end{aligned}$$

hvor $f(t_k, x_{1,k}, x_{2,k}) = e^t - \sin(tx_{2,k}) + x_{1,k}^2$

Eksempel: De koblede likningene

$$\begin{aligned} x''' &= y''x^2 - 3(y')^2 x = (t + x')x^2 - 3(y')^2 x \\ y'' &= t + x' \end{aligned}$$

gir systemet av førsteordens likninger (sett $x_1 = x$, $y_1 = y$):

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 & y_1' &= y_2 \\ x_2' &= x_3 & y_2' &= t + x_2 \\ x_3' &= (t + x_2)x_1^2 - 3y_2^2 x_1 \end{aligned}$$

Vektornotasjon:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad & \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) &= (f_1(t, \mathbf{x}), \ldots, f_M(t, \mathbf{x})) \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) &= (x_1(t), \ldots, x_M(t)) \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t) &= \left(x_1'(t), \ldots, x_M'(t)\right) \end{aligned}$$