UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 10. Desember 2018.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.1: 3
Oppgave 1.2: $1 - 2x^2$
Oppgave 1.3: $1 - x + x^2$
Oppgave 1.4: $y(t) = \frac{1}{4}(te^{2t} + t + 1)$
Oppgave 1.5: $y(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$
Oppgave 1.6: $p_3(x) = 1 - (x+1) + (x+1)x + 2(x+1)x(x-1)$
Oppgave 1.7: 0.4439
Oppgave 1.8: Alle lineære funksjoner, men ikke for alle polynomer av grad ≤ 2.
Oppgave 1.9: 21
Oppgave 1.10: 0.0518

Oppgave 2.1

a) La $f(x) = \frac{1}{x}$. Vis ved induksjon at den k'te deriverte av f er

Løsning. For $k = 0$ er utsagnet opplagt sant. Anta så at $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ for $k = 0, \ldots, n$. Vi får at

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left((-1)^n n! x^{-n-1}\right)' = (-1)^n n!(-n-1)x^{-n-2}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{(n+1)+1}},$$

som viser at induksjonshypotesen er sann også for $n+1$. Dermed er induksjonshypotesen sann for alle n.

b) Anta at vi har funnet $T_n f(x)$, Taylorpolynomet til f av grad n om punktet $a = 2$. Hvor stor må n være for at $|T_n f(x) - f(x)| \leq 10^{-3}$ for alle $x \in (2, 3)$?

(Fortsettes på side 2.)

Løsning. Restleddet i Taylors formel er

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{c^{n+2}(n+1)!}(x-2)^{n+1} = \frac{(-(x-2))^{n+1}}{c^{n+2}},$$

der $c \in [2, x]$. Siden $x \leq 3$ så har dette sin største mulige absoluttverdi når $c = 2$ og $x = 3$, slik at

$$\left| \frac{(-(x-2))^{n+1}}{c^{n+2}} \right| \leq 2^{-n-2}.$$

Vi trenger derfor bare velge n slik at $2^{-n-2} \leq 10^{-3}$, det vil si $2^{n+2} \geq 1000$. Det er derfor klart at vi kan velge $n = 8$.

Oppgave 2.2

a) En funksjon f er bare kjent i de tre punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 3$ der den har verdiene $f(0) = -1$, $f(1) = -2$, $f(3) = 2$. Finn interpolasjonspolynomet $p(x)$ som interpolerer f i disse punktene.

Løsning. Newtonformen til $p(x)$ er $c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$. Setter vi inn for de tre punktene får vi likningene

$$\begin{aligned} -1 &= c_0 \\ -2 &= c_0 + c_1 \\ 2 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2. \end{aligned}$$

Dette gir $c_0 = -1$, $c_1 = -2 - c_0 = -1$, og $c_2 = (2 - c_0 - 3c_1)/6 = 1$, slik at vi får $p(x)$ er $p(x) = -1 - x + x(x-1)$.

b) Det er kjent at f er kontinuerlig. Forklar hvorfor f da må ha et nullpunkt c i intervallet $(1, 3)$ og bruk interpolasjonspolynomet $p(x)$ til å finne en tilnærming til c.

Finn også en tilnærming til $\int_0^3 f(x)dx$ ved hjelp av interpolasjonspolynomet. Hvis du ikke fant polynomet i a), så får du her lov til å velge deg et annet polynom.

Løsning. Vi har at $f(1) < 0$, $f(3) > 0$, og det følger da fra skjæringssetningen at f har et nullpunkt i $(1, 3)$. På samme måte har $p(x)$ også et nullpunkt i $(1, 3)$, og vi kan bruke dette som vår tilnærming. Dette punktet kan vi finne ved å løse $-1 - x + x(x-1) = 0$, som kan skrives $x^2 - 2x - 1 = 0$. Denne har røtter $\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Her er det bare $1 + \sqrt{2}$ som ligger i $(1, 3)$, slik at dette blir vår tilnærming. Som en tilnærming til integralet kan vi bruke

$$\int_0^3 p(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - x \right]_0^3 = 9 - 9 - 3 = -3.$$

Oppgave 2.3 (kun for MAT-INF1100)

a) Finn løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 9n$$

med startverdier $x_0 = 3$ og $x_1 = 3$.

(Fortsettes på side 3.)

Løsning. De karakteriske likningen blir $r^2 - 6r + 8 = 0$, og denne har røtter $\frac{6\pm 2}{2}$, det vil si at røttene er 2 og 4. Den generelle løsningen på den homogene likningen blir dermed $x_n^{(h)} = C2^n + D4^n$.
Gjetter vi på $x_n^{(p)} = An + B$ for den partikulære løsningen finner vi at

$$\begin{aligned}
&A(n+2) + B - 6(A(n+1) + B) + 8(An + B) \\
&= (A - 6A + 8A)n + 2A + B - 6A - 6B + 8B \\
&= 3An + 3B - 4A = 9n,
\end{aligned}$$

slik at $A = 3$, og dermed $B = 4$, slik at $x_n^{(p)} = 3n + 4$. Den generelle løsningen blir dermed $3n + 4 + C2^n + D4^n$. Initialkravene gir nå

$$4 + C + D = 3 \qquad\qquad 7 + 2C + 4D = 3$$

slik at

$$C + D = -1 \qquad\qquad C + 2D = -2.$$

Vi ser nå at $D = -1$, $C = 0$, slik at $x_n = 3n + 4 - 4^n$.
b) Den generelle løsningen til differensligningen

$$9x_{n+2} - 15x_{n+1} + 4x_n = 0$$

er $x_n = C\left(\frac{1}{3}\right)^n + D\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Vi lar $x_0 = 1$. For hvilke verdier av x_1 vil vi kunne få stor relativ feil når vi simulerer differensligningen med disse startverdiene på en datamaskin?

Løsning. Røttene i den karakteristiske likningen er $\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{18} = \frac{15\pm 9}{18}$, som blir $4/3$ og $1/3$. Stor relativ feil blir mulig når $D = 0$, siden avrundingsfeil vil føre til at roten $4/3$ bidrar likevel, og denne vil trekke det hele mot uendelig. $x_0 = 1$ gir at $C + D = 1$, slik at det er tilfellet $C = 1$, $D = 0$ vi bør se på, det vil si når $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Dette svarer til $x_1 = 1/3$.

Oppgave 2.3 (kun for MAT-IN1105)

Skriv en funksjon `secant(f, x0, x1, N)` i Python som tar funksjonen f, startpunkter x_0 og x_1, og N som parametre, og som kjører N iterasjoner av sekantmetoden. Funksjonen skal returnere den siste verdien for x_n som ble regnet ut.
Vi minner om at sekantmetoden finner verdien for neste iterasjon fra de to foregående ved hjelp av formelen

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}).$$

Løsning. Koden under løser begge programmeringsoppgavene.

```
from math import sqrt

def secant(f, x0, x1, N):
    xpp = x0
    xp = x1
```

(Fortsettes på side 4.)

```
    for k in range(N):
        x = xp - ((xp-xpp)/(f(xp)-f(xpp)))*f(xp)
        xpp = xp
        xp = x
    return xp

def f(x):
    return x**2 - 2.

def test_secant():
    x = secant(f, 3, 2, 10)
    assert abs(x - sqrt(2)) <= 1E-8 , 'error, last estimate is %s' % x

if __name__ == '__main__':
    test_secant()
```

Oppgave 2.4 (kun for MAT-IN1105)

Skriv en testfunksjon som kjører `secant` (som du programmerte i forrige oppgave) på funksjonen $f(x) = x^2 - 2$, med startverdier $x_0 = 3$ og $x_1 = 2$, og med 10 iterajoner. Testfunksjonen skal feile hvis
`abs(x - sqrt(2))>1E-8` der `x` er estimatet som ble returnert fra `secant`. Med andre ord, testfunksjonen sjekker om sekantmetoden finner verdier nær nullpunktet $x = \sqrt{2}$. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av et `assert`-statement).

Oppgave 2.4 (MAT-INF1100), 2.5 (MAT-IN1105)

Vi betrakter den andreordens differensialligningen

$$x'' - 5\sin(x') + 2x^2 = \cos t$$

med startbetingelser $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Vi bruker Eulers metode med steglengde $h = \frac{1}{10}$ for å tilnærme løsningen $x(t)$. Beregn x_2, tilnærmingen ved tiden $t = 2h$.
Hint: Gjør om ligningen til et system av førsteordens differensialligninger.

Løsning. Med $y = x'$ kan dette skrives som førsteordenssystemet

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= 5\sin y - 2x^2 + \cos t, \end{aligned}$$

slik at vi kan sette

$$f(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} y \\ 5\sin y - 2x^2 + \cos t \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Det første steget med Eulers metode gir nå

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + hf(t, \boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sin 0 - 2 + \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Det andre steget gir

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + hf(t_1, \boldsymbol{x}_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -0.1 \\ 5\sin(-0.1) - 2 + \cos(0.1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.99 \\ -0.1 - 0.5\sin(0.1) - 0.2 + 0.1\cos(0.1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.99 \\ -0.3 - 0.5\sin(0.1) + 0.1\cos(0.1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.99 \\ -0.2504 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Siste komponenten her ble ganske komplisert, men denne trenger vi ikke. Det er den første komponenten som gir at $x_2 = 0.99$.