UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 27. November 2019.
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.1: $5 + 8(x-1) + 5(x-1)^2$
Oppgave 1.2: 1
Oppgave 1.3: $x - x^2/2 + x^3/3$
Oppgave 1.4: $y(t) = t + 1 + 2e^{2t} + 3e^{3t}$
Oppgave 1.5: $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + 8}$
Oppgave 1.6: $p_2(x) = -8 + 4(x+2)$ ($p_2(x) = 8 + 4(x-2)$ godtas også)
Oppgave 1.7: $1 - 2/(\pi + 2)$
Oppgave 1.8: $Ch^2 \max_{x\in[a-h,a+h]} |f'''(x)|$
Oppgave 1.9: 1.8961
Oppgave 1.10: 6

Oppgave 2.1

La $f(x) = \ln(1-x)$, der $x < 1$.
a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = -(k-1)!(1-x)^{-k}$ for $k \geq 1$.

Løsning. Vi ser at $f'(x) = -1/(1-x)$. Siden $0!$ er definert som 1 er utsagnet sant for $k = 1$.
Anta så at $f^{(k)}(x) = -(k-1)!(1-x)^{-k}$ for $k = 1, \ldots, n$. Vi får at

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = -(n-1)!(-n)(-1)(1-x)^{-n-1} \\ &= -n!(1-x)^{-(n+1)} = -((n+1)-1)!(1-x)^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

som viser at induksjonshypotesen er sann også for $n+1$. Dermed er induksjonshypotesen sann for alle n.
b) Skriv ned Taylorpolynomet av grad n om 0 for f. Hvor mange ledd må du ta med i Taylorpolynomet for at feilen skal bli mindre enn 10^{-2} for alle x i intervallet $[-1/2, 0]$?

Løsning. Vi har at $f^{(k)}(0) = -(k-1)!$ for $k \geq 1$. Siden $f(0) = 0$ får vi Taylorpolynomet $-\sum_{k=1}^{n} x^k/k$.

(Fortsettes på side 2.)

Restleddet i Taylors formel er

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{-n!(1-c)^{-(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1} = -\frac{(1-c)^{-(n+1)}}{n+1}x^{n+1},$$

der $c \in [x, 0]$. Det er klart at $(1-c)^{-(n+1)}$ har 1 som sin største verdi for $c \in [x, 0]$. Siden $x \in [-1/2, 0]$ blir da

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Prøver vi oss fram finner vi at $n = 4$ er den minste verdien som gir at $\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} < 0.01$.

c) Finn interpolasjonspolynomet $p_2(x)$ som interpolerer f i punktene $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, og $x_2 = 1/2$. Bruk polynomet $p_2(x)$ til å beregne en tilnærming til f' i punktet x_1. Hva blir feilen?

Løsning. Interpolasjonspolynomet har formen $p_2(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x$. Setter vi inn punktet $(-1, \ln 2)$ får vi at $c_0 = \ln 2$. Setter vi inn punktet $(0, 0)$ får vi at $0 = c_0 + c_1$, slik at $c_1 = -\ln 2$. Setter vi inn punktet $(1/2, -\ln 2)$ får vi at $-\ln 2 = c_0 + c_1\frac{3}{2} + c_2\frac{3}{2}\frac{1}{2}$, slik at $c_2 = \frac{4}{3}(-\ln 2 - \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 2) = -\frac{2}{3}\ln 2$. Dermed blir interpolasjonspolynomet

$$p_2(x) = \ln 2\left(1 - (x+1) - \frac{2}{3}(x+1)x\right).$$

Som tilnærming til $f'(x_1) = f'(0)$ kan vi nå bruke $p_2'(0)$. Vi får først at

$$p_2'(x) = \ln 2\left(-1 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) = -\ln 2\left(\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right),$$

og dermed $p_2'(0) = -\frac{5}{3}\ln 2 \approx -1.1552$. Den eksakte verdien er $f'(x_1) = f'(0) = -1$, slik at feilen blir 0.1552.

Oppgave 2.2 (kun MAT-INF1100)

a) Finn løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^{n+1}$$

med startverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$.

Løsning. Den karakteristiske likningen blir $r^2 - 5r + 6 = 0$, som har røtter 2 og 3. Den generelle løsningen av den homogene ligningen er dermed $x_n^h = A2^n + B3^n$.

Siden grunntallet i potensen på høyre side (2) er en rot i den karakteristiske likningen, så må vi øke graden med 1 når vi leter etter en partikulær løsning, og vi prøver derfor $x_n^p = Cn2^n$. Venstre side blir da

$$(n+2)4C2^n - 5(n+1)2C2^n + 6Cn2^n = -2C \cdot 2^n = -C2^{n+1}.$$

Derfor må vi velge $C = -1$. Den generelle løsningen av ligningen blir dermed

$$x_n = -n2^n + A2^n + B3^n.$$

(Fortsettes på side 3.)

Setter vi inn initialbetingelsene får vi ligningene

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -2 + 2A + 3B &= 0, \end{aligned}$$

som gir $A = 1$, $B = 0$. Løsningen blir dermed $x_n = 2^n - n2^n = (1-n)2^n$.
b) Vi simulerer nå en annen differensligning:

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 0,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1/2$$

på en datamaskin med 64 bits flyttall. Hvordan vil de beregnede løsningene oppføre seg for store n?

Løsning. Den karakteristiske ligningen har røtter $1/2$ og 2, og fra initialverdiene er det klart at løsningen blir $x_n = 2^{-n}$. Maskinen vil regne ut denne ligningen som $x_{n+2} = (5x_{n+1} - 2x_n)/2$, og dette vil maskinen klare uten avrundingsfeil. Når n blir stor vil imidlertid 2^{-n} til slutt bli avrundet til 0 (maskinen representerer eksponenten med endelig mange bits). Fra dette punktet av vil et lite bidrag fra den andre roten komme inn ($\epsilon 2^n$), og når n vokser videre vil dette gå mot uendelig. Til slutt vil x_n beregnes til ∞. x_{n+1} vil deretter også beregnes til ∞. x_{n+2} vil deretter bli NaN ($\infty - \infty$).

Oppgave 2.2 (kun MAT-IN1105)

I denne oppgaven skal vi lage et program som bruker Newtons metode til å finne et nullpunkt til en funksjon. Newtons metode er oppgitt i formelsamlingen.
Skriv en funksjon `newton(f, df, x0, N)` i Python som tar funksjonen `f`, dens deriverte `df`, en startverdi `x0`, og `N` som parametre, og kjører `N` iterasjoner av Newtons metode på `f`. Funksjonen skal returnere verdien fra siste iterasjon (det vil si x_N).

Løsning. Følgende kode løser begge programmeringsoppgavene.

```
from math import sqrt

def newton(f, df, x0, N):
    x = x0
    for k in range(N):
        x -= f(x)/df(x)
    return x

def f(x):
    return x**2 - 4.

def df(x):
    return 2*x

def test_newton():
    x0 = 1
    x = newton(f, df, x0, 10)
    # alternatively you can use lambda functions:
```

(Fortsettes på side 4.)

```
    # x = newton(lambda x: x**2 - 2., lambda x: 2*x, x0, 10)
    assert abs(x - 2) <= 1E-8 , 'error, last estimate is %g' % x

if __name__ == '__main__':
    test_newton()
```

Oppgave 2.3 (kun MAT-IN1105)

Skriv en testfunksjon som bruker funksjonen `newton(f,df,x0,N)` fra forrige oppgave til å kjøre 10 iterasjoner av Newtons metode for å finne et nullpunkt til $f(x) = x^2 - 4$, og med startverdi $x_0 = 1$.
Testfunksjonen skal feile hvis $|x - 2| > 10^{-8}$, der x er verdien som ble returnert fra Newtons metode. Med andre ord, testfunksjonen sjekker om Newtons metode med start i $x_0 = 1$ ender opp i nærheten av nullpunktet $x = 2$.
Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av et `assert`-statement).

Oppgave 2.3 (MAT-INF1100), 2.4 (MAT-IN1105)

Vi betrakter den førsteordens differensialligningen

$$x' = \frac{1}{10}x^2 + \cos t.$$

med startbetingelsen $x(0) = 1$.
a) Vi bruker Eulers midtpunktsmetode med steglengde $h = \frac{\pi}{2}$ for å tilnærme løsningen $x(t)$. Beregn x_1, tilnærmingen ved tiden $t = \frac{\pi}{2}$.
Vi minner om at Eulers midtpunktsmetode for $x' = f(t, x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} x_{k+1/2} &= x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + hf(t_k + h/2, x_{k+1/2}). \end{aligned}$$

Løsning. Vi får først at

$$\begin{aligned} x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{10}x_0^2 + \cos t_0\right) &= 1 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{10} + \cos 0\right) \\ = 1 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{10} + 1\right) &= 1 + \frac{11}{40}\pi \approx 1.8639. \end{aligned}$$

Deretter får vi at

$$x_1 = x_0 + h\left(\frac{1}{10}x_{1/2}^2 + \cos(\pi/4)\right) = 1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{10}x_{1/2}^2 + \sqrt{2}/2\right) \approx 2.6565.$$

b) Et alternativ til Eulers metode er *baklengs Euler*, der x_{k+1} regnes ut ved å løse

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1}, x_{k+1}),$$

(Fortsettes på side 5.)

der $t_k = kh$ er definert som i Eulers metode, og systemet $x' = f(t, x)$ er definert som tidligere i oppgaven, og med samme initialbetingelse. Beregn x_1, tilnærmingen ved tiden $t = \frac{\pi}{2}$ som du får med baklengs Euler. Er tilnærmingen entydig definert?

Hint: Du må løse en andregradsligning.

Løsning. Vi får at $x_1 = x_0 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{10}x_1^2 + \cos(t_1)\right)$, som gir ligningen $\frac{\pi}{20}x_1^2 - x_1 + 1 = 0$ (siden $\cos(t_1) = \cos(\pi/2) = 0$). Løsningen på denne gir at

$$x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \pi/5}}{\pi/10},$$

som gir de to løsningene ≈ 5.1237 og ≈ 1.2425. Tilnærmingen vi får er med andre ord ikke entydig definert.