Seksjon 1.1 i Kalkulus: Naturlige tall

Definisjon:

Vi skriver $\mathbb{N}$ / $\mathbb{Z}$ for mengden av naturlige / hele tall.

partall: Naturlige tall som er delelige med 2: $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

Oddetall: Naturlige tall som ikkeer delelige med 2: $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

Primtall: Naturlige tall ≥ 2 som bare er delelige med 1 og seg selv:
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

Ethvert naturlig tall kan skrives som et produkt av primtall.

Summetegn

Sum av 10 første kvadrattall: $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2$

Vi skriver: $\sum_{n=1}^{10} n^2$

Sum av 100 første oddetall: $1 + 3 + 5 + \dots + 199$

Hvordan skrive med summetegn: $2\cdot 0+1 \quad 2\cdot 1+1 \quad 2\cdot 2+1 \quad \dots \quad 2\cdot 99+1$

$2n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 99$

somsum: $\sum_{n=0}^{99}(2n+1)$

$2\cdot 1-1 \quad 2\cdot 2-1 \quad 2\cdot 3-1 \quad \dots \quad 2\cdot 100-1$

$2n-1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 100$

som sum: $\sum_{n=1}^{100}(2n-1)$

Har skrevet med summetegn på to forskjellige måter.

Generelt skriver vi $\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{m-1} + a_m$

Hvis $k > m$: Ingenting summeres (0)

n : summasjons indeks
k : nedre summasjonsgrense
m : øvre summasjonsgrense

∞ , $-\infty$ er tillatt

Eksempel 1 Skrive $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$ med summetegn.

Løsning:

$$= (-1)^0 + (-1)^1 x^3 + (-1)^2 x^6 + (-1)^3 x^9 + \cdots$$

$$= \underbrace{(-1)^0 x^{3\cdot 0}}_{n=0} + \underbrace{(-1)^1 x^{3\cdot 1}}_{n=1} + \underbrace{(-1)^2 x^{3\cdot 2}}_{n=2} + \underbrace{(-1)^3 x^{3\cdot 3}}_{n=3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3\cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n$$

Notasjon fra boka : $0^0 = 1$.

Egenskaper ved summetegn

(i): $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n)$

(ii): $\sum_{n=k}^{m} c a_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n$

(iii): $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n$

Bevis for (iii):

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_l)$$

$$= a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_l$$

$$= \sum_{n=k}^{l} a_n \quad \blacksquare$$

Hvordan skifte indeks i summetegn?

Eksempel 2 Vi ser på $\sum_{k=2}^{10} (-1)^k x^{k+2} = x^4 - x^5 + x^6 - \cdots + x^{12}$

Vi bytter til indeks i, der $i = k+2$

k løper fra 2 til 10 $\Rightarrow$ i løper fra 4 til 12

$i = k+2 \Rightarrow k = i-2$

Derfor: $\sum_{k=2}^{10} (-1)^k x^{k+2} = \sum_{i=4}^{12} (-1)^{i-2} x^i = \sum_{i=4}^{12} (-1)^i x^i$

$(-1)^i (-1)^{-2}$, $(-1)^{-2} = 1$

Induksjonsbevis (seksjon 1.2)

Hvordan finne en formel for sammen av de n første tallene?

Finn $\sum_{i=1}^{n} i$ for $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$ $\sum_{i=1}^{2} i = 3$, $\sum_{i=1}^{3} i = 6$ $\sum_{i=1}^{4} i = 10$

Sett $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ $S(1) = 1$ $S(2) = 3$ $S(3) = 6$ $S(4) = 10$

$S(n)$ gir altså sammen av de n første tallene for $n = 1, 2, 3, 4$.

Spørsmål: Er $S(n)$ lik sammen av de n første tallene for alle n?

Vi har uendelig mange påstander: P_n: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Fortsetter etter $n=4$:

P_1	1	1
P_2	3	3
P_3	6	6
P_4	10	10
P_5	15	15
P_6	21	21

Anta nå at vi fortsetter dette, og klarer å vise at opp til og med P_k er sann. Er det da slik at P_{k+1} også er sann?

Det vil si, er $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$? (hvor: $\frac{n(n+1)}{2}$)