1.4.2 Binomialformelen

Når vi multipliserer ut $(a+b)^n$, så blir koeffisienten til $a^{n-i}b^i$ lik $\binom{n}{i}$.

Med andre ord: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

Enkelt bevis: Det er nok å vise at $\binom{n}{i}$ gir alle verdiene i Pascals trekant. Dette er tilfelle hvis

$$\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}$$

(siden vi observerte at verdiene i Pascals trekant summerte seg slik)

Kombinatorisk bevis for dette:

$\binom{k}{i}$ er antall måter utplukk å plukke ut i baller fra k stk baller $\left(= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2 \cdots i} \right)$

$\binom{k+1}{i}$ —————"————— i baller fra $k+1$ baller.

Anta $k+1$ baller, og at i plukkes ut.

To muligheter:
- ball 1 plukkes ut : $\binom{k}{i-1}$ muligheter for resterende b.
- ball 1 plukkes ikke ut : $\binom{k}{i}$ muligheter

Derfor: $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}$, som var det vi skulle vise.

Litt mer omstendelig bevis:

Definer P_k : $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$

(i) P_1 sier at $a+b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$, slik at P_1 er sann.

(ii) Anta at $P_1, \ldots, P_k$ er sanne. Vi må vise at P_{k+1} også er sann.

Vi har:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

$$P_k = (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1}$$

$j = i+1 \qquad i = j-1$

$$\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k}{j-1}a^{k-j+1}b^j$$

$$= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left(\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right)a^{k+1-i}b^i + b^{k+1}$$

Fra kombinatorisk bevis

$$= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i + b^{k+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i,$$

slik at P_{k+1} også er sann. Derfor er P_k sann for alle k.

Alternativt bevis for $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ ved regning:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdots i} + \frac{k(k-1)\cdots(k-i+2)}{1\cdots(i-1)}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1) + k(k-1)\cdots(k-i+2)\,i}{1\cdots i}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+2)\left((k-i+1)+i\right)}{1\cdots i} \qquad (k-i+1)+i = k+1$$

$$= \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-i+2)}{1\cdots i}$$

$$= \binom{k+1}{i}$$

Eksempel: Summen av alle binomialkoeffisienter er 2^n: $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$:

Bevis: $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$

Oppgaver fra seksjon 1.4 til neste uke: 2b, 3bc, 5, 8

Oppgave 9 Vis at $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

Løsning: $3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$