Kap. 2 Kalkulus: Reelle tall

$\mathbb{N}$: Naturlige tall

$\mathbb{Z}$: Hele tall

$\mathbb{R}$: Reelle tall

Intervaller:

Lukket intervall: $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$

Åpent intervall: $(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$

Halvåpent intervall:
$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}$
$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \}$

a, b kan være $\pm\infty$

Tallverdien av et reelt tall:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Oppgave 2.1.5 i Kalkulus

a) Finn alle x som løser $|x-2| < |x+3|$

Løsning: Samme som

$$(x-2)^2 < (x+3)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 < x^2 + 6x + 9$$
$$-5 < 10x$$
$$x > -\frac{1}{2}$$
$$x \in (-\tfrac{1}{2}, \infty)$$

Trekantulikheten (2.1.1 i boka)

Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ så er $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bevis: Det er klart at

$$a \leq |a|$$
$$|-a| = |a|$$
$$|a| = \max(a, -a)$$

Derfor: (1) $a+b \le |a|+|b|$

(2) $-(a+b) = (-a)+(-b) \le |-a|+|-b| = |a|+|b|$

Det følger at: $|a+b| = \max(a+b, -(a+b)) \le |a|+|b|$ ∎

Likhet i trekantulikheten: $a=4, b=1$: $|4+1|=5$, $|4|+|1|=4+1=5$

Ulikhet i trekantulikheten: $a=-4, b=1$ $|-4+1|=|-3|=3$ $|-4|+|1|=4+1=5$.

Omvendt trekantulikhet (korollar 2.1.3): $||a|-|b|| \le |a-b|$

Beviset med trekantulikheten:

$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b|+|b|$ $\Rightarrow$ $|a|-|b| \le |a-b|$

$|b| = |a+(b-a)| \le |a|+|b-a|$ $\Rightarrow$ $|b|-|a| \le |b-a|$

$-(|a|-|b|) \le |a-b|$

$||a|-|b|| \le |a-b|$

Seksjon 2.2 i Kalkulus: Rasjonale tall

Vi skriver $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ for mengden av rasjonale tall. Tall som ikke er rasjonale kalles irrasjonale.

Eksempler: π, e, $\sqrt{2}$.

Spesielt har vi at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (sett $b=1$).

Setning 2.2.1 Hvis x, y er rasjonale, så er $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ også rasjonale

Bevis for $x+y$: Hvis $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, så er

$$x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$ som er rasjonal siden $ad+bc$ og bd er heltall. ∎

Teorem 2.2.4 : $\sqrt{2}$ er irrasjonal

Bevis: Anta for motsigelse at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, der $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.
Vi kan anta at a og b ikke har felles faktorer.

Da er:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$\Downarrow$

a^2 partall

$\Downarrow$ lemma under

a partall

$\Downarrow$

$a = 2n$ for en $n \in \mathbb{Z}$

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2 \Rightarrow b^2$ partall $\Rightarrow b$ partall

a og b har altså 2 som en felles faktor, som er en motsigelse.
Derfor er $\frac{a}{b}$ irrasjonal ■

Lemma 2.2.3 Dersom $a \in \mathbb{N}$ er oddetall, så er a^2 oddetall.
(samme som a^2 partall $\Rightarrow a$ partall)

Bevis: Siden a er oddetall så er $a = 2n-1$, for $n \in \mathbb{N}$.

$a^2 = (2n-1)^2 = \underbrace{4n^2 - 4n}_{\text{partall}} + 1$, som er et oddetall.

Hvis x er irrasjonal, y rasjonal, så er $x+y$ irrasjonal.

Bevis: Hvis ikke ville $x + y = z$, der z er rasjonal

Da er $x = \underbrace{z}_{\text{rasjonal}} - \underbrace{y}_{\text{rasjonal}}$, som er rasjonal, motsigelse ■

Spesielt er $\pi + 2$ irrasjonal.

Hvis både x og y er irrasjonale, så kan $x \pm y$ bli rasjonal:

$$\pi - \pi = 0$$

irrasjonal irrasjonal rasjonal.

Eksempel:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{5+2\sqrt{5}+1}{5-1} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}, \text{ som er rasjonal.}$$

2.2.6 Arkimedes prinsipp

(i) For ethvert $a \in \mathbb{R}$ (uansett hvor stort), finnes $n \in \mathbb{N}$ s.a. $n > a$

(ii) For ethvert $b > 0$ (uansett hvor lite), finnes $n \in \mathbb{N}$ s.a. $\frac{1}{n} < b$

Bevis (i): Hvis $a < 1$, sett $n = 1$.
Ellers er $a \geq 1$. Fjern alle desimaler i a, og legg til 1.
Tallet du nå får er i $\mathbb{N}$, og er $> a$.

(ii): Bruk (i) til å finne $m \in \mathbb{N}$ s.a. $m > \frac{1}{b}$. Men da er $\frac{1}{m} < b$ ∎

Setning 2.2.7 Ethvert åpent intervall (a, b) (med $a < b$) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall

Bevis: Det finnes et rasjonalt tall i (a, b):

La $m \in \mathbb{N}$ være slik at $\frac{1}{m} < b - a$ (Ark. prinsipp (i))
Jeg påstår at det finnes $k \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{k}{m} \in (a, b)$
(slik at $\frac{k}{m}$ er tallet vi ser etter)

La k være det minste hele tallet slik at $k > am$ (Ark. prinsipp (i))

$$\frac{k}{m} > a \qquad \frac{k-1}{m} \leq a$$

Vi har $\frac{k}{m} = \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < a + (b-a) = b$

Derfor: $\frac{k}{m} > a$, $\frac{k}{m} < b$, slik at $\frac{k}{m} \in (a,b)$

Det finnes et irrasjonalt tall i (a,b)

Vi har $c = \frac{k}{m} \in (a,b)$. Velg $p \in \mathbb{N}$ så stor at $c + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$

$> a$ $\qquad$ $< b$

$\frac{1}{p} < \frac{b-c}{\sqrt{2}}$

Ark. prinsipp (ii)

Da er $c + \frac{\sqrt{2}}{p} \in (a,b)$, som er irrasjonalt.

rasjonal irrasjonalt

Oppgave 2.2.11

Vis at dersom $\cos x$ er irrasjonal, så er $\cos(\frac{x}{2})$ og $\sin(\frac{x}{2})$ det også.

Løsning: $\cos(\frac{x}{2})$: Siden $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, så er

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos x + 1)$$

irrasjonal rasjonal

, som er irrasjonalt ∎

Seksjon 2.3 Kompletthet av de reelle tallene

Definisjon: $A \subseteq \mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det finnes $b \in \mathbb{R}$ s.a. $a \leq b$ for alle $a \in A$.

b kalles da for en øvre skranke for A.

b kalles en minste øvre skranke for A dersom den er en øvre skranke for A, som er $\leq$ alle andre øvre skranker for A.

Vi skriver også $b = \sup(A)$ for minste øvre skranke.

Nedre skranke, største nedre skranke, og $\inf(A)$ (infimum) defineres tilsvarende

Hvis $A = [a, b]$, så er $\sup(A) = b$, $\inf(A) = a$.

Kompletthetsprinsippet: Enhver ikke-tom begrenset delmengde $A \subseteq \mathbb{R}$, har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$

Byttet du ut $\mathbb{R}$ med $\mathbb{Q}$, holder ikke dette prinsippet.

Oppgaver kap. 2 Kalkulus

2.1 : 1bef, 2, 3bef, 4bce, 8, 9, 10.
2.2 : 3, 5, 8, 9
2.3 : 1, 3, 5
2.4 : 4

Oppgave 2.3.6

La A, B være ikke-tomme begrensede delmengder.
Definer $A + B = \{ a + b : a \in A, b \in A \}$.
Vis at $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Løsning: La $a \in A$, $b \in B$. Da er $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$

$$\Downarrow$$

$$\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$$

Å vise at $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ er vanskeligere:

Siden $\sup(A)$ og $\sup(B)$ er minste øvreskranker for A/B, så finnes, for hver ε, en $a \in A$, $b \in B$ s.a.

$$a \geq \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad b \geq \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$a + b \geq \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$$

Siden dette gjelder for alle ε så er

$$\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$$

Siden $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$, $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, så er

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Spørsmål fra salen: Er kvadratroten av et irrasjonalt tall alltid irrasjonalt?

Svar: Ja. Hvis ikke ville vi ha at $\sqrt{x} = y$ der x er irrasjonal, y rasjonal.

Da får vi at $x = y^2$. x er irrasjonal, y^2 rasjonal, motsigelse.