Kompendiet kap. 2

På en datamaskin representeres alt med 0 og 1. Hvorfor?

Kompendiet kap. 3

Spørsmål: Hva er et reelt tall?

Svar: Et desimaltall med ueendelig mange sifre.

Spørsmål: Hva er forskjellen mellom rasjonale og irrasjonale tall?

Svar: Kun rasjonale tall har et repeterende mønster i sifrene.

Eksempel: Vis at $\frac{1}{7} = 0.\underbrace{142857}_{\text{rep.}}142857\ldots$

Løsning: Vi har $0.142857142857\ldots = 0.142857\left(1 + 10^{-6} + 10^{-12} + \cdots\right)$

Dette er en ueendelig geometrisk rekke, og vi vet at

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 k^n = \frac{a_0}{1-k} \quad \text{for } |k| < 1$$

Her er $a_0 = 1$, $k = 10^{-6}$, slik at summen blir: $\frac{1}{1-10^{-6}}$.

Totalt får vi $\frac{0.142857}{1-10^{-6}} = \frac{142857}{10^6 - 1} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$

Eksempel: Vis at $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$, der 3 gjentas.

Løsning: $0.3333\ldots = 0.3\left(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots\right)$

$$= \frac{0.3}{1-10^{-1}} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left(= 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + \cdots = \frac{3\cdot 10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}\right)$$

Merk: Vi har ikke entydig desimalrepresentasjon av reelle tall

siden $1.000\ldots = 0.9999\ldots$

Når vi skriver desimaltallet 120.25, så er dette egentlig en representasjon i **10-tallsystemet**

$$120.25 = 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}$$

Vi skriver også $120.25 = 120.25_{10}$, der 10 indiker tallsystemet.
Vi kan også skrive 120.25 i **totallsystemet**

$$120.25 = \underbrace{1\cdot 2^6}_{64} + \underbrace{1\cdot 2^5}_{32} + \underbrace{1\cdot 2^4}_{16} + \underbrace{1\cdot 2^3}_{8} + \underbrace{0\cdot 2^2}_{0} + \underbrace{0\cdot 2^1}_{0} + \underbrace{0\cdot 2^0}_{0} + \underbrace{0\cdot 2^{-1}}_{0} + \underbrace{1\cdot 2^{-2}}_{0.25}.$$

Vi skriver også $120.25_{10} = 1111000.01_2$

Hvordan ble sifrene regnet ut?

I eksemplene over kalles tallene 10 og 2 for grunntall, eller basar, og betegnes ofte med B.

Sifre i
- 2-tallsystemet: 0 og 1
- 10-tallsystemet: $0, 1, 2, \ldots, 9$
- 16-tallsystemet: $0, 1, 2, \ldots, 9, a, b, c, d, e, f$

16-tallsystemet kalles også det heksadesimale tallsystemet.

Definisjon 3.4: En representasjon i B-tallsystemet er en samling sifre d_i i B-tallsystemet, skrevet

$$(d_k\, d_{k-1} \ldots d_0)_B$$

Dette tolkes som det naturlige tallet

$$d_k B^k + d_{k-1} B^{k-1} + \cdots + d_1 \cdot B^1 + d_0 B^0$$

Merk: Mulige sifre i B-tallsystemet er $\underbrace{0, 1, \ldots, B-1}_{n_0, n_1, \ldots, n_{B-1}}$.

Lemma 3.5 Ethvert naturlig tall a kan representeres unikt i B-tallsystemet

Notasjon som trengs for beviset:

Hvis a og b er heltall så er:

- $a // b$: heltallsdelen når a deles med b
- $a \% b$: resten i divisjonen

Merk: Ethvert helt tall a kan skrives unikt som $a = rb + s$, der $0 \leq s < b$. Da er $r = a // b$, $s = a \% b$

Eksempel: $a = 5$, $b = 3$: $a // b = 1$ $\quad 5 \% 3 = 2$

$\Rightarrow 5 = \underbrace{1}_{a//b} \cdot 3 + \underbrace{2}_{a\%b}$

Oppgave 3.1.3c) $a = -29$, $b = 7$. Hva er $a // b$, $a \% b$?

Løsning: $-29/7 \approx -4.14 \Rightarrow -29 // 7 = -5$

$$a \% b = a - (a // b) b = -29 - (-5)7 = -29 + 35 = 6$$

$$\Rightarrow -29 = \underbrace{(-5)}_{a//b} \cdot 7 + \underbrace{6}_{a\%b}$$

Bevis for lemma 3.5 (gir også algoritme for å finne sifrene i representasjonen)

Vi ser på $a = 1318$, $B = 4$

Siden $4^6 = 4096 > 1318$, så trenger vi ikke mer enn 6 sifre:

$$1318 = d_5 \cdot 4^5 + d_4 \cdot 4^4 + d_3 4^3 + d_2 4^2 + d_1 \cdot 4^1 + d_0$$
$$= (d_5 d_4 \cdots d_0)_4$$

Hva må d_0 være? Skriv om:

$$1318 = 4(d_5 4^4 + \cdots + d_1) + d_0$$

r s

må være $1318 // 4 = 329$ må være $1318 \,\%\, 4 = 2 = d_0$ $(b=4)$

Siden rep. $a = rb + s$ er unik

4

Derfor: $329 = d_5 4^4 + \cdots + d_1$

$= 4(d_5 4^3 + \cdots + d_2) + d_1$

må være $329 // 4 = 82$ må være $329 \,\%\, 4 = 1 \Rightarrow d_1 = 1$

Derfor: $82 = d_5 4^3 + \cdots + d_2$

$= 4(d_5 4^2 + d_4 \cdot 4^1 + d_3) + d_2$

må være $82 // 4 = 20$ må være $82 \,\%\, 4 = 2 \Rightarrow d_2 = 2$

Derfor $20 = d_5 4^2 + d_4 \cdot 4^1 + d_3$

$= 4(d_5 \cdot 4 + d_4) + d_3$

må være $20 // 4 = 5$ må være $20 \,\%\, 4 = 0 \Rightarrow d_3 = 0$

Derfor: $5 = d_5 \cdot 4 + d_4 \Rightarrow d_5 = 1, d_4 = 1$

må være $5 // 4 = 1$ $5 \,\%\, 4 = 1$

Altialt: $1318 = d_5 \cdot 4^5 + d_4 \cdot 4^4 + \cdots + d_0$

$= 1 \cdot 4^5 + 1 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2$

$= (1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2)_4$

Vi ser at alle sifrene blir unike, og at prosedyren vår vil virke for alle naturlige tall.

Regningen vi gjorde, oppsummeres i en tabell:

$$
\begin{array}{lll}
1318 & \xrightarrow{\%4} & 2 = d_0 \\
\downarrow /\!/ 4 & & \\
329 & \xrightarrow{\%4} & 1 = d_1 \\
\downarrow /\!/ 4 & & \\
82 & \xrightarrow{\%4} & 2 = d_2 \\
\downarrow /\!/ 4 & & \\
20 & \xrightarrow{\%4} & 0 = d_3 \\
\downarrow /\!/ 4 & & \\
5 & \xrightarrow{\%4} & 1 = d_4 \\
\downarrow /\!/ 4 & & \\
1 & \xrightarrow{\%4} & 1 = d_5 \\
\downarrow & & \\
0 & &
\end{array}
$$

Algoritme 3.6

La a være et tall som i β-tallsystemet har $k+1$ sifre.

$$a = (d_k d_{k-1} \cdots d_0)_\beta$$

Disse sifrene kan finnes slik:

for $i = 0, \ldots, k$

$d_i = a \,\%\, \beta$

$a = a /\!/ \beta$

Konvertere mellom base 2 og base 16:

Observasjon: En representasjon på 4 sifre i 2-tallsystemet kan alltid konverteres til et heksadesimalt tall.

Bevis: Følger av at $d_3 2^3 + d_2 2^2 + d_1 \cdot 2 + d_0 < 16$, og svarer derfor til et siffer i 16-tallsystemet.

Konverter $(\cdots d_2 d_1 d_0)_2$ til base 16:

Skriv som: $d_0 + d_1 \cdot 2 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3 + d_4 \cdot 2^4 + \cdots$

$$= \underbrace{d_0 + d_1 \cdot 2 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3}_{\text{konv. til hex. siffer } e_0} + \underbrace{2^4}_{16} \underbrace{(d_4 + d_5 \cdot 2 + d_6 \cdot 2^2 + d_7 \cdot 2^3)}_{\text{konv til hex. siffer } e_1} + \cdots$$

$= e_0 + 16 e_1 + 16^2 e_2 + \cdots$

$= (\cdots e_2 e_1 e_0)_{16}$

Kan altså konvertere 4 sifre om gangen.