Sek 3.2 i kompendiet forts.

Fra sist: Vi kan konvertere fra base 2 til base 16 ved å ta for oss 4 binære sifre om gangen

Omvendt: Konvertere $(\cdots d_2 d_1 d_0)_{16}$ til base 2:

Skriv som $d_0 + d_1 \cdot 16 + d_2 \cdot 16^2 + \cdots$

$= (a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3) + (b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + b_3 2^3) 2^4 + \cdots$

d_0 konv. til binært

$= a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 2^3 + b_0 2^4 + b_1 2^5 + b_2 2^6 + b_3 2^7 + \cdots$

$= (\cdots b_3 b_2 b_1 b_0 a_3 a_2 a_1 a_0)_2$

Så, sifre kan konverteres ett om gangen denne veien også.

Oppgaver fra seb 3.2: 1, 2ab, 5bf, 6cf, 7, ekstraoppgave.

Oppgave 3.2.2 (kompendiet)

c) Konverter 17 til base 2 (enklest direkte: $17 = 16+1 = 2^4+1 = 10001_2$)

Med algoritme fra sist gang:

$17 \xrightarrow{\%2} 1 = d_0$

$17 // 2 = 8 \xrightarrow{\%2} 0 = d_1$

$8 // 2 = 4 \xrightarrow{\%2} 0 = d_2$

$4 // 2 = 2 \xrightarrow{\%2} 0 = d_3$

$2 // 2 = 1 \xrightarrow{\%2} 1 = d_4$

$1 // 2 = 0$

$\Rightarrow 17 = 10001_2$

f) Konverter 126 til base 16

$126 \xrightarrow{\%16} 14 = e = d_0$

$126 // 16 = 7 \xrightarrow{\%16} 7 = d_1$

$7 // 16 = 0$

$126 = 7e_{16}$

sjekk: $7 \cdot 16 + 14 = 112 + 14 = 126$

Konvertere mellom base 2 og base 8: Kan nå ta for oss 3 binære sifre om gangen:

Oppgave 3.2.3

c) Skriv $101\ 010\ 10_2$ i base 8:

Grupper: $010\ 101\ 010_2 = 252_8$

$0+2+0 = 2$, $4+1 = 5$, $0+2+0 = 2$

Oppgave 3.2.4 Skriv 44_8 i base 2:

Siden $4_8 = 4 = 2^2 = 100_2$

Derfor er $44_8 = \underbrace{100}_{4_8}\ \underbrace{100}_{4_8}{}_2$

Oppgave 32.5 a) Konverter $100\ 1101_2$ til base 16:

$0100\ 1101_2 = 4d_{16}$

$2^2 = 4$, $2^3 + 2^2 + 0 + 1 = 13 = d$

Oppgave 3.2.6 a) Konverter $3c_{16}$ til base 2

$3_{16} = 3 = 2^1 + 1 = 0011_2$

$c_{16} = 12 = 8 + 4 + 0 + 0 = 1100_2$

Derfor: $3c_{16} = 0011\ 1100_2 = \underline{1111\ 00_2}$

Oppgave 3.2.8

b) Finn en B slik at $25 = 100_B$

Løsning: Vi må ha $25 = 1 \cdot B^2 + 0 \cdot B + 0 \cdot 1 = B^2$

Derfor må $B = 5$.

Generelt: Hvis $a = 100_B$ så må $a = B^2$, slik at $B = \sqrt{a}$, og a må være et kvadrattall.

Seksjon 3.3: Representasjon av desimaltall

Vi skal se på uttrykk på formen

$$d_{-1}B^{-1} + d_{-2}B^{-2} + d_{-3}B^{-3} + \cdots \quad \text{(kan være uendelig mange ledd)}$$

B er som før basen, d_{-k} er sifre slik at $0 \le d_{-k} \le B-1$

Vi skriver $(0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\cdots)_B$ for en slik representasjon.

Alle slike tall er i $[0,1]$ siden

$$d_{-1}B^{-1} + d_{-2}B^{-2} + \cdots \le (B-1)B^{-1} + (B-1)B^{-2} + \cdots = (B-1)(B^{-1} + B^{-2} + \cdots)$$

$$= (B-1)\frac{B^{-1}}{1-B^{-1}} = (B-1)\frac{1}{B-1} = 1$$

Spesielt er altså $0.(B-1)(B-1)\cdots_B = 1$, og vi kan bare få 1 hvis vi har $B-1$ hele veien.

Siden $0.1111\cdots_2 = 1.0000\cdots_2$, så har vi ingen unik representasjon

Oppgave 3.2.5

d) Konverter 0.01011001010_2 til base 16.

Løsning:

$$0.\underbrace{0101}_{4+1=5}\ \underbrace{1001}_{8+1=9}\ \underbrace{0100}_{4=4}{}_2 = 0.594_{16}$$

Eksempel: 0.25 i totallsystemet: Siden $0.25 = 2^{-2}$, så er

$$0.25 = 0.01_2$$

Konvertor brøker til B-tallsystemet

Hvordan skrive $\frac{1}{5}$ i 8-tallsystemet? Skal løse

$$\frac{1}{5} = d_{-1}8^{-1} + d_{-2}8^{-2} + \cdots$$

Trick: Gang med 8 på begge sider:

$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = d_{-1} + d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2} + \cdots \Rightarrow d_{-1} = 1$$

d_{-1} må være ulike

mellom 0 og 1

$$\frac{3}{5} = d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2} + \cdots$$

gang igjen med 8:

$$\frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5} = d_{-2} + d_{-3}8^{-1} + \cdots \Rightarrow d_{-2} = 4$$

$$\frac{4}{5} = d_{-3}8^{-1} + d_{-4}8^{-2} + \cdots$$

gang igjen med 8:

$$\frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5} = d_{-3} + d_{-4}8^{-1} + \cdots \Rightarrow d_{-3} = 6$$

$$\frac{2}{5} = d_{-4}8^{-1} + d_{-5}8^{-2} + \cdots$$

gang med 8

$$\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5} = d_{-4} + d_{-5}8^{-1} + d_{-6}8^{-2} + \cdots \Rightarrow d_{-4} = 3$$

$$\frac{1}{5} = d_{-5}8^{-1} + d_{-6}8^{-2} + \cdots$$

Det var her vi startet ($\frac{1}{5} \to \frac{3}{5} \to \frac{4}{5} \to \frac{2}{5} \to \frac{1}{5}$), og da vil sifrene gjenta seg i det uendelige.

Derfor $\frac{1}{5} = 0.14631463\cdots_8$, der 1463 gjentas i det uendelige.

Konklusjon: For alle rasjonale tall i $[0,1]$ så vil sifrene gjentas i B-tallsystemet, og vi har unikhet så lenge vi unngår $B-1$ i det uendelige.

Andre veien gjelder også: Har vi en repeterende sifferutvikling i B-tallsystemet, så er tallet rasjonalt.
(følger som for $0.142857142857\ldots$, med samme formelen for en geometrisk rekke.

Algoritme 3.20

La $a = \frac{b}{c}$ være et rasjonalt tall i $(0,1)$. De første k sifrene i B-tallsystemet kan da regnes ut med algoritmen:

for $i = -1, -2, \ldots, -k$

$d_i = (b \cdot B) // c$

$b = (b \cdot B) \% c$

Oppgave: Konverter $1/10$ til 2-tallsystemet.

Løsning: Her er $b=1$, $c=10$:

$b=1 \longrightarrow (1\cdot 2)//10 = 0 = d_{-1}$

$\downarrow$

$b=(1\cdot 2)\%10=2 \longrightarrow (2\cdot 2)//10 = 0 = d_{-2}$

$\downarrow$

$b=(2\cdot 2)\%10=4 \longrightarrow (4\cdot 2)//10 = 0 = d_{-3}$

$\downarrow$

$b=(4\cdot 2)\%10=8 \longrightarrow (8\cdot 2)//10 = 1 = d_{-4}$

$\downarrow$

$b=(8\cdot 2)\%10=6 \longrightarrow (6\cdot 2)//10 = 1 = d_{-5}$

$\downarrow$

$b=(6\cdot 2)\%10=2 \longrightarrow \ldots$

Vi ser at $d_{-2}, d_{-3}, d_{-4}, d_{-5}$ vil gjentas i det uendelige, slik at

$$\frac{1}{10} = 0.0\,0011\,0011\ldots_2 \quad \text{(der 0011 gjentas)}$$

NB!

Kontrollregning: $0.0011 = 2^{-3} + 2^{-4} = \frac{2+1}{2^4} = \frac{3}{16}$

$$0.0011\,0011\,0011\ldots_2 = \frac{3}{16}\left(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + \ldots\right) = \frac{3}{16}\,\frac{1}{1-2^{-4}}$$

geom. rekke

$$= \frac{3}{2^4-1} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$0.0\,0011\,0011\ldots_2 = 2^{-1}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

Alle tall i $[0,1]$ kan fås ved en desimalrepresentasjon i B-tallsystemet.