Kap. 3 : kompendiet forts.

Konvertere generelle tall til β-tallsystemet

La oss se på $\frac{1}{5} = 0.2 = a$; 8-tallsystemet igjen.
Vil nå ha en generell algoritme for å finne sifrene, som virker for alle tall, ikke bare de rasjonale.

$$0.2 = d_{-1}\,8^{-1} + d_{-2}\,8^{-2} + \cdots$$

gang med 8 som før:

$$1.6 = 1 + 0.6 = d_{-1} + d_{-2}\,8^{-1} + \cdots \quad \Rightarrow \quad d_{-1} = 1$$
$$(= \lfloor a \cdot 8 \rfloor)$$

$$0.6 = d_{-2}\,8^{-1} + d_{-3}\,8^{-2} + \cdots$$

$a \cdot 8 - d_{-1}$

Slik kan vi fortsette videre. Dette gir

Algoritme 3.16

Anta $a \in (0,1)$ har $d_{-1}, \ldots, d_{-k}$ som sine første k desimale sifre i β-tallsystemet. Disse sifrene kan fås ved:

for $i = -1, -2, \ldots, -k$
$\quad d_i = \lfloor a \cdot \beta \rfloor$
$\quad a = a \cdot \beta - d_i$

Konvertering mellom 2-talls og 16-talls systemet kan gjøres sifferfor sifferogså for desimaltall.

Lemma 3.22 Representasjon av et desimaltall i β-tallsystemet har endelig mange sifre hvis og bare hvis $a = \frac{b}{c}$, og alle primfaktorene i c deler β

Bevis: $\Rightarrow$: Anta $a = (0 . d_{-1} \cdots d_{-k})_\beta$

Da er $a = d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + \cdots + d_{-k}\beta^{-k}$

$= \dfrac{d_{-1}\beta^{k-1} + d_{-2}\beta^{k-2} + \cdots + d_{-k}}{\beta^k}$, som er rasjonalt,

med $b = d_{-1}\beta^{k-1} + \cdots + d_{-k}$, $c = \beta^k$.

Vi ser at alle primfaktorene i c (= β^k) deler β

(β og β^k har de samme primfaktorene, og noen kan ha blitt forkortet mot det som er i telleren.

$\Leftarrow$: Anta $a = \frac{b}{c}$, og at alle primfaktorer i c deler β

Bevis ved eksempel:

Anta $a = \frac{8}{9}$, $\beta = 6$ (primfaktorene i c er 3, som deler β, $\frac{\beta}{3}$ er heltall.

gang med 4 oppe/nede

skriv $\frac{8}{9} = \frac{32}{36}$ (lar seg gjøre når c bare inneholder primfaktorer fra β)

↑ potens av β: β^2

32 kan skrives i 6-tallsystemet som $32 = 5\cdot 6 + 2 = 52_6$

$\Rightarrow \frac{32}{36} = \frac{5\cdot 6 + 2}{6^2} = 5\cdot 6^{-1} + 2\cdot 6^{-2} = 0.52_6$, som har endelig mange sifre ■

Ukesoppgaver seksjon 3.3: 1, 2, 3abefg, 4, 6, 7, 8

Oppgave 3.3.3 c) Konverter $\frac{1}{9}$ til base 3.

alg. for rasjonale tall

$b = 1 \longrightarrow (1\cdot 3)\,//\,9 = 0 = d_{-1}$

$\downarrow$

$b = (1\cdot 3)\,\%\,9 = 3 \longrightarrow (3\cdot 3)\,//\,9 = 1 = d_{-2}$

$\downarrow$

$b = (3\cdot 3)\,\%\,9 = 0 \longrightarrow d_{-3} = d_{-4} = \cdots = 0$

Derfor: $\frac{1}{9} = 0.01_3$

gen. algoritme

$a = 0.1111\ldots$

$d_{-1} = \lfloor 0.1111\ldots \cdot 3 \rfloor = \lfloor 0.3333\ldots \rfloor = 0$

$a = 0.1111\ldots\cdot 3 - d_{-1} = 0.3333\ldots$

$d_{-2} = \lfloor 0.3333\ldots \cdot 3 \rfloor = 1$

$a = 0.3333\ldots\cdot 3 - 1 = 0$

algoritmen terminerer her.

Seksjon 3.4: Aritmetikk i base B

Addisjon

Addisjon av sifre i base 8:

$$5_8 + 6_8 = 5+6 = 11 = \underline{1\cdot 8+3} = 13_8$$

Legg sammen tall med flere sifre:

$$457_8 + 325_8$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 457_8 \\ +\ 325_8 \\ \hline = \ 1004_8 \end{array}$$

3. søyle: $7_8 + 5_8 = 7+5 = 12 = 1\cdot 8+4 = 14_8$

2. søyle: $1_8 + 5_8 + 2_8 = 1+5+2 = 8 = 10_8$

1. søyle: $1_8 + 4_8 + 3_8 = 1+4+3 = 8 = 10_8$

Subtraksjon:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\,8} \\ 3\not{2}1_8 \\ -\ 177_8 \\ \hline = \ 122_8 \end{array}$$

3. søyle: $8 + 1_8 - 7_8 = 8+1-7 = 2 = 2_8$

2. søyle: $8 + 1_8 - 7_8 = 8+1-7 = 2 = 2_8$

1. søyle: $2_8 - 1 = 2-1 = 1 = 1_8$

Multiplikasjon

Gangetabell i base 4:

	1_4	2_4	3_4
1_4	1_4	2_4	3_4
2_4	2_4	10_4	12_4
3_4	3_4	12_4	21_4

$2_4 \cdot 3_4 = 2\cdot 3 = 6 = 4+2 = 12_4$

$3_4 \cdot 3_4 = 3\cdot 3 = 9 = 2\cdot 4+1 = 21_4$

Kan brukes til å regne ut $312_4 \times 12_4$ slik:

$$\begin{array}{r} 312_4 \times 1_4 \\ \hline 2_4 \\ {\scriptstyle 1\,4}\ 3_4 \\ \hline 312_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\,312_4 \times 2_4 \\ \hline 1230_4 \end{array}$$

$$312 \times 12_4$$

$$1230_4$$

$$312_4$$

$$11010_4$$

$5 = 4+1 = 11_4$

$1+2+1 = 4 = 10_4$

$1+1+3 = 5 = 11_4$

Oppgaver sek. 3.4: 1, 2ac, 3abc, 4ab

Oppgave 2e

$$43_5 + 10_5 = 103_5$$

$3_5 + 0_5 = 3 = 3_5$

$4_5 + 1_5 = 4+1 = 5 = 10_5$

Oppgave 3e

$$43_5 - 14_5 = 24_5$$

$5 + 3_5 - 4_5 = 5+3-4 = 4 = 4_5$

Oppgave 4f

$$210_3 \cdot 12_3$$

$$1120_3$$

$$210_3$$

$$10220_3$$

$210_3 - 1_3 = 210_3$

$210_3 \cdot 2_3 = 1120_3$

$3 = 10_3$