Kap. 4 i Kalkulus forts.

Løsning av 2. ordens lineære, homogene differensligninger

La $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$ være gitt, og anta at den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter r_1 og r_2.

Setning 4.1.5 i boka sier at løsningene til differensligningen er nøyaktig de følger som kan skrives på formen:

$$(*) \quad x_n = Cr_1^n + Dr_2^n \qquad (C \text{ og } D \text{ konstanter})$$

Vi viser først at (*) faktisk er en løsning:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n &= \left(Cr_1^{n+2} + Dr_2^{n+2}\right) + b\left(Cr_1^{n+1} + Dr_2^{n+1}\right) + c\left(Cr_1^n + Dr_2^n\right) \\ &= C\left(r_1^{n+2} + br_1^{n+1} + cr_1^n\right) + D\left(r_2^{n+2} + br_2^{n+1} + cr_2^n\right) \\ &= Cr_1^n\underbrace{\left(r_1^2 + br_1 + c\right)}_{0} + Dr_2^n\underbrace{\left(r_2^2 + br_2 + c\right)}_{0} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Eksempel harebestanden igjen

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

Karakteristisk ligning: $r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Vi fikk to forskjellige reelle røtter, slik at generell løsning er

$$x_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Spesiell løsning (eller partikulær løsning):

$$x_1 = x_2 = 1$$

Vi velger i stedet $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $\quad (\Rightarrow x_2 = x_1 + x_0 = 1 + 0 = 1)$

$x_0 = 0$: $C + D = 0 \Rightarrow D = -C$

$x_1 = 1$: $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$c\sqrt{5} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Vi viser nå at alle løsninger er på formen (*):

$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$ har nøyaktig en løsning som tilfredsstiller $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$ (siden $x_{n+2} = -bx_{n+1} - cx_n$).

Det er derfor nok å vise at det finnes C og D slik at $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$ tilfredsstiller $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$:

$x_0 = b_0$: $C + D = b_0 \Rightarrow D = b_0 - C$

$x_1 = b_1$: $Cr_1 + Dr_2 = b_1 \Rightarrow Cr_1 + (b_0 - C)r_2 = b_1$

$$\Downarrow$$

$$C(r_1 - r_2) = b_1 - b_0 r_2$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{b_1 - b_0 r_2}{r_1 - r_2} \qquad (r_1 - r_2 \neq 0, \text{ siden } r_1 \neq r_2)$$

; tillegg: $D = b_0 - C$

Vi fant derfor en unik løsning på formen $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$ med $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$. ■

For $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ er det tre muligheter:

$r^2 + br + c = 0$ har
1. To forskjellige reelle røtter
2. To like reelle røtter
3. Komplekse røtter

2. To like reelle røtter

La r_1 være eneste rot i $r^2 + br + c = 0$.

Jeg påstår at den generelle løsningen er $x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n$

Vi sjekker først at $x_n = Cr_1^n$ er en løsning:

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = Cr_1^{n+2} + bCr_1^{n+1} + cCr_1^n$$
$$= Cr_1^n(\underbrace{r_1^2 + br_1 + c}_{0}) = 0$$

Vi sjekker så at $x_n = Dnr_1^n$ er en løsning

(husk at $r^2+br+c = (r-r_1)^2 = r^2 - 2r_1r + r_1^2$ $(\Rightarrow b = -2r_1,\ c = r_1^2)$)

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = x_{n+2} - 2r_1 x_{n+1} + r_1^2 x_n$$
$$= D(n+2)r_1^{n+2} - 2r_1 D(n+1)r_1^{n+1} + r_1^2 Dn r_1^n$$
$$= Dr_1^{n+2}\big((n+2) - 2(n+1) + n\big)$$
$$= Dr_1^{n+2}(\underbrace{n - 2n + n + 2 - 2}_{0}) = 0$$

Det følger at $x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n$ også løser $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$

Finnes det også C, D, slik at $x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n$ også løser $x_0 = b_0, x_1 = b_1$?

Vi får:

$n=0$: $C = b_0$

$n=1$: $Cr_1 + Dr_1 = b_1$

$\Downarrow\ r_1 \neq 0$

$$C + D = \frac{b_1}{r_1}$$
$$D = \frac{b_1}{r_1} - b_0,$$

som gir C og D, når $r_1 \neq 0$)

$r_1 = 0$ svarer til differenslignigen $x_{n+2} = 0$ $(b = c = 0)$.

3. Komplekse røtter (må da være konjugerte av hverandre)

La røttene til $r^2+br+c=0$ være r og $\bar{r}$.

Jeg påstår at den generelle løsningen er $x_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n$.

Viser at disse er løsninger:

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = \underline{Cr^{n+2}} + \underline{\bar{C}\bar{r}^{n+2}} + b(\underline{Cr^{n+1}} + \underline{\bar{C}\bar{r}^{n+1}}) + c(\underline{Cr^n} + \underline{\bar{C}\bar{r}^n})$$
$$= Cr^n(\underbrace{r^2 + br + c}_{0}) + \bar{C}\bar{r}^n(\underbrace{\bar{r}^2 + b\bar{r} + c}_{0})$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Se i boka for bevis for at alle løsninger har denne formen.

Bedre måte å uttrykke x_n på:

Sett $C = A+iB$, $r = \rho e^{i\theta}$ (polarform) } ρ: modulus, θ: argument

$\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$

$r^n = \rho^n e^{in\theta}$, $\bar{r}^n = \rho^n e^{-in\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

$\sin\theta = -\sin(-\theta)$

$$x_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n$$
$$= (A+iB)\rho^n e^{in\theta} + (A-iB)\rho^n e^{-in\theta}$$
$$= (A+iB)\rho^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) + (A-iB)\rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$
$$= \cdots \text{ (8 ledd forenkles)}$$
$$= \rho^n(\underbrace{2A}_{E}\cos(n\theta) - \underbrace{2B}_{F}\sin(n\theta))$$
$$= \rho^n(E\cos(n\theta) + F\sin(n\theta))$$

Eksempel 4.1.7 (To forskjellige reelle røtter)

$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$ $\quad x_0 = 1$, $x_1 = -2$

Løsning: $r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow r_1 = 4,\ r_2 = 1$

Generell løsning: $x_n = C4^n + D1^n = C4^n + D$

$x_0 = 1$: $C + D = 1$
$x_1 = -2$: $4C + D = -2$ } $4C - C = -2 - 1 \Rightarrow 3C = -3 \Rightarrow C = -1$

$C + D = 1 \Rightarrow D = 1 - C = 1 + 1 = 2$

partikulær løsning: $x_n = -4^n + 2 = \underline{2 - 4^n}$

Eksempel 4.1.11 (dobbelrot)

$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n$ $\quad x_0 = 1$, $x_1 = 8$

Løsning: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2.$

Generell løsning: $x_n = C2^n + Dn2^n$

$x_0 = 1$: $C = 1$

$x_1 = 8$: $2C + 2D = 8 \Rightarrow C + D = 4 \Rightarrow D = 4 - C = 4 - 1 = 3$

partikulær løsning: $x_n = 1 \cdot 2^n + 3n2^n = 2^n(1+3n)$

Eksempel 4.1.12 (komplekse røtter)

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0 \qquad x_0 = 1,\ x_1 = 2$$

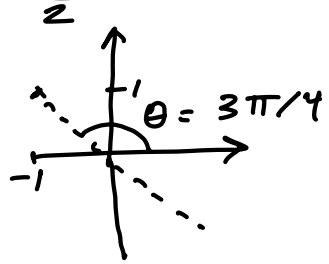
Løsning:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$r = -1 + i$ $\left(\arctan\theta = \frac{1}{(-1)} = -1\right.$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$



Generell løsning: $x_n = \rho^n(E\cos(n\theta) + F\sin(n\theta))$

$$= (\sqrt{2})^n(E\cos(n3\pi/4) + F\sin(n3\pi/4))$$

$x_0 = 1$: $E = 1$

$x_1 = 2$: $= (\sqrt{2})(E\cos(3\pi/4) + F\sin(3\pi/4)) = 2$

$$= \sqrt{2}\left(E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2$$

$$-E + F = 2$$

$$F = 2 + E = 3$$

partikulær løsning: $x_n = (\sqrt{2})^n(\cos(n3\pi/4) + 3\sin(n3\pi/4))$

$$= 2^{n/2}(\cos(n3\pi/4) + 3\sin(n3\pi/4))$$