Fra sist: Vi løste $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$,

og fikk på polarform $x_n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n3\pi}{4} + 3\sin\frac{n3\pi}{4}\right)$

Den andre formen for løsningen:

$$x_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n = C(-1+i)^n + \bar{C}(-1-i)^n$$

$x_0 = 1$: $C + \bar{C} = 1$

$x_1 = 2$: $C(-1+i) + \bar{C}(-1-i) = 2$ } $\cdot(-1+i)$

$$-\bar{C}(-1+i) + \bar{C}(-1-i) = 2 - (-1+i)\cdot 1 = 3 - i$$

$$-2i\bar{C} = 3 - i$$

$$\bar{C} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{1+3i}{2}, \quad C = 1 - \bar{C} = \frac{1-3i}{2}$$

partikulær løsning: $Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n = \frac{1-3i}{2}(-1+i)^n + \frac{1+3i}{2}(-1-i)^n$

Oppgaver sek 4.1 i Kalkulus: 1ab, 3a6, 5ab, 9, 13, 14, 15

Oppgave 4.1.14 $x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0$ $x_1 = -12$ $x_3 = -6$

x_n: avvik fra middeltemperaturen i måned n

Når er det kaldest/varmest?

Løsning: $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$

$\rho = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1$

Vi bruker $r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$:



$\theta = \frac{\pi}{6}$

(evt: $\arctan\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$)

$\Rightarrow r = \rho e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

Generell løsning: $x_n = 1^n\left(E\cos\frac{n\pi}{6} + F\sin\frac{n\pi}{6}\right) = E\cos\frac{n\pi}{6} + F\sin\frac{n\pi}{6}$.

Spesiell løsning:

$x_1 = -12$: $E\cos\frac{\pi}{6} + F\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}E + \frac{1}{2}F = -12$

$x_3 = -6$: $E\cos\frac{\pi}{2} + F\sin\frac{\pi}{2} = F = -6$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}E - 3 = -12 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}E = -9 \Rightarrow E = \frac{-18}{\sqrt{3}} = -6\sqrt{3}$$

partikulær løsning: $x_n = -6\sqrt{3}\cos\frac{n\pi}{6} - 6\sin\frac{n\pi}{6}$

Hva blir største/minste verdi?

Se på $f(x) = -6\sqrt{3}\cos x - 6\sin x$ (så $x = \frac{n\pi}{6}$)

$f'(x) = 6\sqrt{3}\sin x - 6\cos x = 0$

$6\sqrt{3}\sin x = 6\cos x$

$\tan x = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$n = 1 + 6k$

Med andre ord: størst/minst temperatur inntreffer etter $1+6k$ måneder.

$n=1$: $x_1 = -12$

$n=7$: $-6\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{6} - 6\sin\frac{7\pi}{6} = -6\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 9 + 3 = 12$

$n=13$: -12

$n=19$: 12

Tilsvarende teori for første ordens ligninger:

Ved tid $n=0$ har vi 1000 kroner, og får 2% rente i banken.
La x_n være beløp etter n år. Da er

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n}_{\text{fra før}} + 0.02x_n = 1.02x_n$$

$x_{n+1} - 1.02x_n = 0$ er en homogen, førsteordens, lineær ligning.

Karakteristisk ligning: $r - 1.02 = 0 \Rightarrow r = 1.02$

Generell løsning: $x_n = Cr^n = C(1.02)^n$

$x_0 = 1000 \Rightarrow C = 1000$

Spesiell løsning: $x_n = 1000 \cdot 1.02^n$