Kap. 6 i kompendiet: Simulering av differensligninger på datamaskin og avrundingsfeil.

Definisjon 6.7 En likning på formen

$$(*) \qquad x_{n+k} = g(n) + f_0(n)x_n + f_1(n)x_{n+1} + \cdots + f_{k-1}(n)x_{n+k-1}$$

sies å være lineær, inhomogen, k-ordens differensligning

kan simuleres på datamaskin, som for 1. orden, 2. orden, når man har initialbetingelser $x_0, \ldots, x_{k-1}$

Frem til nå har $f_0(n), \ldots, f_{k-1}(n)$ vært konstanter.

Mulige avrundingsfeil i $(*)$:

1. koeffisientene i $(*)$ kan ikke representeres eksakt.
2. Initialbetingelsene $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ kan ikke representeres eksakt.

Eksempel 1 Vi ser på $x_{n+2} - \frac{19}{3}x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$.

Hva er løsningen, og hva skjer når vi simulerer dette på datamaskin.

Løsning: kar. ligning:

$$r^2 - \frac{19}{3}r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\frac{19}{3} \pm \sqrt{\frac{361}{9} - 8}}{2} = \frac{\frac{19}{3} \pm \frac{17}{3}}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = 6, \; r_2 = \frac{1}{3}$$

Generell løsning: $C6^n + D\left(\frac{1}{3}\right)^n = C6^n + D3^{-n}$

initialbetingelser:

$$x_0 = 1 \Rightarrow C + D = 1 \Rightarrow C + D = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 6C + \frac{1}{3}D = \frac{1}{3} \Rightarrow 18C + D = 1$$

$$17C = 0 \Rightarrow C = 0, \quad D = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_n = 3^{-n}$$

På datamaskin: $x_{n+2} = \frac{19}{3}x_{n+1} - 2x_n$, $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$

Hvorfor får vi ikke 3^{-n} for store n?

Løsningen er ustabil i den forstand at, hvis vi endrer litt på initialbetingelsene, så vil den nye løsningen gå mot ∞:

Her: $x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{3} + \varepsilon$ ← siden $\frac{1}{3}$ ikke kan rep. eksakt med 64 bits flyttall. $|\varepsilon| \approx 10^{-16}$

Løsning med nye initialbetingelser:

$\tilde{x}_n = C6^n + D3^{-n}$, der C, D løser: $C + D = 1$ $(x_0 = 1)$

$6C + \frac{1}{3}D = \frac{1}{3} + \varepsilon$ $(x_1 = \frac{1}{3} + \varepsilon)$

$\left.\begin{matrix} C + D = 1 \\ 18C + D = 1 + 3\varepsilon \end{matrix}\right\}$ $17C = 3\varepsilon \Rightarrow C = \frac{3\varepsilon}{17}$, $D = 1 - C = 1 - \frac{3}{17}\varepsilon$

Derfor: $\tilde{x}_n = \frac{3\varepsilon}{17} 6^n + (1 - \frac{3}{17}\varepsilon) 3^{-n}$

For stor n vil $\tilde{x}_n \approx \frac{3}{17} \varepsilon 6^n$, slik at $\tilde{x}_n \to \infty$

Anta x_k er første som blir ∞ (= inf). Neste blir

$$x_{n+1} = \frac{19}{3} \underbrace{x_n}_{\infty} - 2x_{n-1} = \infty \text{ (med samme fortegn)}$$

neste: $x_{n+2} = \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n = \infty - \infty$, som gir "nan" på datamaskinen.

Merk: Avrundingsfeil i koeffisientene har samme effekt som avrundingsfeil i initialbetingelsene: selv om x_0, x_1 kan representeres eksakt, så vil x_2 da få avrundingsfeil, som vil forplante seg slik som x_1-avrundingsfeilen gjorde.

Noen observasjoner:

1. Anta $r^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1, r_2, s.a. $|r_1| > |r_2|$. Hvis $\tilde{x}_n$ er den simulerte løsningen, og avrundingsfeil inntreffer, så vil vi se at $\tilde{x}_n \approx C r_1^n$.

2. $\frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_{n-1}} \approx \frac{Cr_1^n + Dr_2^n}{Cr_1^{n-1} + Dr_2^{n-1}} \approx \frac{Cr_1^n}{Cr_1^{n-1}} = r_1$,

som gir oss en måte å beregne røtter i polynomer numerisk.

Eksempel 2 Løs $2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = -1$, $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{3}{2}$ ved regning. Hva skjer når vi simulerer denne på datamaskin?

Løsning:

partikulær løsning: Vi prøver $x_n^p = A$:

$$2A - 5A + 2A = -1$$
$$-A = -1$$
$$A = 1 \Rightarrow x_n^p = 1$$

Homogen løsning: $2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$$\Rightarrow r_1 = 2, \; r_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$x_n^h = C2^n + D2^{-n}$$

Generell løsning: $x_n = x_n^p + x_n^h = 1 + C2^n + D2^{-n}$

Spesiell løsning:

$x_0 = 2$: $1 + C + D = 2$ $\Rightarrow$ $C + D = 1$

$x_1 = \frac{3}{2}$: $1 + 2C + \frac{1}{2}D = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $4C + D = 1$

$3C = 0 \Rightarrow C = 0$, $D = 1$

$$\Downarrow$$

$$x_n = 1 + 2^{-n}$$

Vi simulerer: Maskinen regner ut $x_{n+2} = \frac{5}{2}x_{n+1} - x_n - 1$

Både initialverdier og koeffisienter kan her representeres eksakt, derfor vil maskinen regne riktig til å begynne med.

Vi får avrundingsfeil til slutt likevel, siden $1 + 2^{-n}$ krever $n+1$ bits for signifikanden (som har bare 53 bits tilgjengelig).

Fra da av vil maskinen regne ut $1 + \varepsilon 2^n + (1-\varepsilon)2^{-n}$

↓ overflow.

Oppgave 18, midtveis 2021

Simuler $x_{n+1} - 3x_n = 1$, $x_1 = 1$, med 64-bits flyttall.

Løsning: Vi prøver $x_n^p = A$: $A - 3A = 1 \Rightarrow -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$x_n^p = -\frac{1}{2}$$

Homogen løsning: $x_n^h = C3^n$

Generell løsning: $x_n = -\frac{1}{2} + C3^n$

$$x_1 = 1: \; -\frac{1}{2} + 3C = 1 \Rightarrow 3C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n = \frac{1}{2}(3^n - 1) \to \infty$$

Ingen avrundingsfeil i init. bet. eller koeffisientene.
Maskinen regner derfor riktig i starten, men vi får overflow til slutt.

Oppgave 19, midtveis 2021

Hva skjer når vi simulerer $9x_{n+2} - 3x_{n+1} - 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$ med 64-bits flyttall.

Løsning: kar. likning: $9r^2 - 3r - 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{18} = \frac{3 \pm 9}{18}$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{2}{3}, \; r_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_n = C\left(\frac{2}{3}\right)^n + D\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Spesiell løsning:

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = 1: & C + D = 1 \\ x_1 = -\frac{1}{3}: & \frac{2}{3}C - \frac{1}{3}D = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} C + D = 1 \\ 2C - D = -1 \end{array} \Big\} 3C = 0 \Rightarrow C = 0, \; D = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Numerisk: Maskinen regner ut $x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{2}{9}x_n$, og vi har avrundingsfeil i både initialbetingelser og koeffisienter. Derfor vil maskinen regne ut noe på formen

$$(1 - \varepsilon_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \varepsilon_2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Dette vil uansett gå mot 0.