Kap. 11 i Kalkulus (Taylorpolynomer)

Gitt en funksjon $f(x)$, ønsker vi å tilnærme denne med et polynom $P_n(x)$, av grad $\leq n$.

Vi antar at f er mange ganger deriverbar i et punkt $x=a$.

Vi velger P_n slik at $P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

$n=0$: $P_0(x) = f(a)$

$n=1$: $P_1(x) = b_0 + b_1 x$, og vi vil ha:

$$\left.\begin{aligned} P_1(a) &= f(a) \\ P_1'(a) &= f'(a) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} b_0 + b_1 a &= f(a) \Rightarrow b_0 = f(a) - b_1 a \Rightarrow b_0 = f(a) - f'(a)\,a \\ b_1 &= f'(a) \end{aligned}$$

$$P_1(x) = b_0 + b_1 x = f(a) - f'(a)\,a + f'(a)\,x = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$n=2$:

$$\begin{aligned} P_2(a) &= f(a) \\ P_2'(a) &= f'(a) \\ P_2''(a) &= f''(a) \end{aligned}$$

For å finne P_2 hjelper det å skrive det på formen $P_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$

$$\downarrow$$

$$2c_2(x-a)$$

$$\downarrow$$

$$2c_2$$

$$\left.\begin{aligned} P_2(a) &= f(a) \\ P_2'(a) &= f'(a) \\ P_2''(a) &= f''(a) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_0 &= f(a) \\ c_1 &= f'(a) \\ 2c_2 &= f''(a) \\ &\Downarrow \\ c_2 &= \tfrac{1}{2} f''(a) \end{aligned}$$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Generell n: sett $P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$, og løs

$$\left.\begin{aligned} P_n(a) &= f(a) \\ P_n'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}\right\}$$

når P_n deriveres k ganger:

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_{k-1}(x-a)^{k-1} \longrightarrow 0$$

$$c_k(x-a)^k \longrightarrow k!\,c_k$$

$$c_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + c_n(x-a)^n \longrightarrow 0$$

Derfor:

$c_0 = f(a)$
$c_1 = f'(a)$
$\vdots$
$k!c_k = f^{(k)}(a)$
$\vdots$
$n!c_n = f^{(n)}(a)$

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Vi skriver $T_n f(x)$ for $P_n(x)$, og kaller dette for Taylorrekka (polynomet/approksimasjonen) til f av orden n om a

Merk: graden til $T_n f$ kan være $< n$!

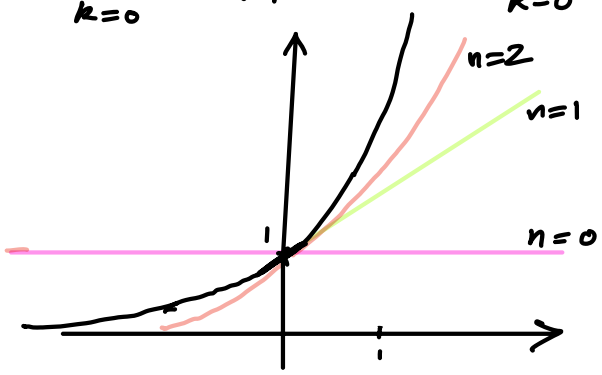
Vi har vist at $T_n f$ er det unike polynomet av grad $\leq n$ med de samme n første deriverte som f (setning 11.1.1 i boka)

Taylorpolynomer vi skal kunne:

1. $f(x) = e^x$ om $a = 0$

   siden $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$, så er $f^{(k)}(0) = 1$, alle k.

   Derfor: $$T_n e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$



2. $f(x) = \sin x$ om $a = 0$

   Vi har at

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$

annenhver er 0
de resterende veksler mellom 1 og -1.

$$T_n \sin(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

$$T_n \sin x = \begin{cases} n \text{ oddetall } (n=2k-1): & x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ n \text{ partall } (n=2k): & T_{n-1} \sin x \end{cases}$$

På samme måte: $T_n f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

Taylorrekkene til $\sin x, \cos x, e^x$ kan "avmystifisere" $e^{ix} = \cos x + i \sin x$:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}_{\sin x}$$

gitt at Taylorrekkene konvergerer:
$= \cos x + i \sin x$

La $T_n f$ være Til f av grad n om a.
Hva er feilen mellom $f(x)$ og $T_n f(x)$?
Vi setter $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ for denne feilen, slik at

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$$

$R_n f(x)$ kalles restleddet

En første formel for $R_n f(x)$:

Teorem Anta at f har kontinuerlige deriverte av orden $n+1$.
For $n \geq 0$ er $R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ (*)

Bevis: Vi bruker induksjon på n:

$n=0$: Resultatet sier: $R_0 f(x) = \frac{1}{0!}\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$, som sier at

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{T_0 f(x)} + R_0 f(x),$$ som er opplagt riktig.

Anta nå at (*) holder for $0, 1, \dots, n-1$. Da kan vi anta:

$$R_{n-1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{derivere}}\underbrace{(x-t)^{n-1}}_{\text{integrere}}\,dt$$

Delvis integrasjon på høyresiden:

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[\left[f^{(n)}(t)\left(-\tfrac{1}{n}\right)(x-t)^n\right]_a^x + \frac{1}{n}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\left[-f^{(n)}(t)(x-t)^n\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Vi får:

$$f(x) = T_{n-1}f(x) + R_{n-1}f(x) = \underbrace{T_{n-1}f(x) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n}_{T_n f(x)} + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$T_n f(x) + R_n f(x) = T_n f(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Det følger at $R_n f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$, som er det vi skulle vise ∎

Korollar: Hvis f og de første $n+1$ deriverte er kontinuerlige på $[a,x]$, og $M = \max_{a\le t\le x}|f^{(n+1)}(t)|$, så er

$$|R_n f(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Bevis: $|R_n f(x)| = \left|\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt\right| \le \frac{1}{n!}\int_a^x \underbrace{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}_{\le M}|(x-t)^n|\,dt$

$$\leq \frac{1}{n!} \int_a^x M (x-t)^n \, dt$$

$$= \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n \, dt$$

$$= \frac{M}{n!} \left[-\frac{1}{n+1} (x-t)^{n+1} \right]_a^x$$

$$= \frac{M}{n!} \frac{1}{(n+1)} (x-a)^{n+1} = \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

■