Forelesning 25/10.

Avslutningsvis kap. 11: For hvilke funksjoner er metodene for numerisk derivasjon eksakte?

Newtonkvotienten: Siden feilen $\leq \frac{M_2}{2}h$: Eksakt når $M_2 = 0$
dvs når $f''(x) = 0$,
dvs for lineære polynomer.

Kan vises direkte:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \begin{cases} f(x)=1: & \frac{1-1}{h} = 0 = f'(a) \\ f(x)=x: & \frac{(a+h)-a}{h} = \frac{h}{h} = 1 = f'(a) \\ f(x)=x^2: & \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h \neq f'(a)=2a \end{cases}$$

Symmetrisk Newtonkvotient: Siden feilen $\leq h^2\frac{M_3}{6}$: Eksakt når $M_3 = 0$
dvs. eksakt når $f'''(x) = 0$,
dvs. eksakt for 2.grads polynomer.

Kan vises direkte:

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \begin{cases} f(x)=1: & \frac{1-1}{2h} = 0 = f'(a) \\ f(x)=x & \frac{(a+h)-(a-h)}{2h} = \frac{2h}{2h} = 1 = f'(a) \\ f(x)=x^2 & \frac{(a+h)^2-(a-h)^2}{2h} = \frac{4ah}{2h} = 2a = f'(a) \\ f(x)=x^3: & \text{oblig 2} \end{cases}$$

$f'(a) = 3a^2$

Kap. 12 i kompendiet: Numerisk integrasjon

Definisjonen av $\int_a^b f(x)dx$:

Vi lager oss en **partisjon** av $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

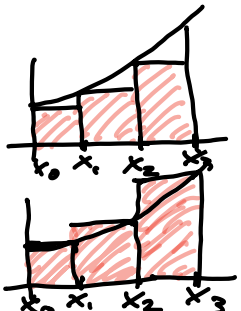
Vi lar $m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ være minste verdi av f på i'te delintervall.

$M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ største

Vi definerer:

$\underline{I}_p = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ (nedre trappesum)

$\overline{I}_p = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ (øvre trappesum)



Her er P en partisjon.

Det er klart at $\underline{I}_P \leq \overline{I}_P$ for alle partisjoner.

Hvis $\sup_P \underline{I}_P = \inf_P \overline{I}_P$, der sup/inf tas over alle partisjoner av $[a,b]$, så sier vi at f er integrerbar, og vi skriver $\int_a^b f(x)dx = \sup_P \underline{I}_P = \inf_P \overline{I}_P$

Maskevidden til P: $\max_i (x_i - x_{i-1})$

Teorem 12.3 i boka (uten bevis):
La f være integrerbar, og $P_1, P_2, \ldots$ være partisjoner s.a. maskevidden til $P_i \to 0$ når $i \to \infty$. La $\tilde{I}_{P_i} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, der $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Da har vi at $\lim_{i\to\infty} \tilde{I}_{P_i} = \int_a^b f(x)dx$.

Midtpunktmetoden: Her velger vi $t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ (midtpunkt intervall i) i tilnærmingen over, og kaller denne for $x_{i-\frac{1}{2}}$

Vi sier at en partisjon er uniform hvis $x_i = a + ih$, her $h = \frac{b-a}{n}$
$(\Rightarrow x_i - x_{i-1} = h$, alle $i)$

Vi begrenser oss fra nå av til uniforme partisjoner.

Da er $\tilde{I}(n) := \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})(x_i - x_{i-1}) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$ en tilnærming til $\int_a^b f(x)dx$

Eksempel: Midtpunktsmetoden med to delintervaller, som tilnærming til $\int_0^1 x^3 dx$.

Løsning: $x_0 = 0 \quad x_1 = 1/2 \quad x_2 = 1$, $h = \frac{1}{2}$

$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \qquad x_{3/2} = \frac{3}{4}$

Midtpunktsmetoden gir: $h\sum_{i=1}^{2} f(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64}\right) = \frac{7}{32}$

Eksakt verdi for integralet: $\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

Feilen i midtpunktsmetoden: $\left|\frac{1}{4} - \frac{7}{32}\right| = \frac{1}{32}$

Siden $f(x) = x^3$ er integrerbar: Midtpunktsmetoden vil konvergere mot

$\frac{1}{4}$ når $n \to \infty$.

Vi vil helst finne en n s.a. $\left| \tilde{I}(n) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$.

Algoritme som "stort sett" fungerer bra for å finne en slik n:

> for $k = 0, 1, 2, \ldots$
> if $|\tilde{I}(2^{k+1}) - \tilde{I}(2^k)| < \varepsilon$:
> returner $\tilde{I}(2^{k+1})$ som svar.

Feilanalyse for numerisk integrasjon er delt i to:

1. Lokal feil (E_L) over et delintervall $[x_{i-1}, x_i]$
2. Global feil (E_G) over hele $[a,b]$.

Lokal feil Anta $n=1$. Feilen er

$$E_L = \left| \int_a^b f(x)dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

Hvis vi Taylorutvikler f om $m = \frac{a+b}{2}$ får vi

$$f(x) = f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{f''(c)}{2}(x-m)^2 \quad , \text{ der } c \in [m,x]$$

Dette gir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(m)dx + \int_a^b f'(m)(x-m)dx + \int_a^b \frac{f''(c)}{2}(x-m)^2 dx$$

$$= f(m)(b-a) + \left[\tfrac{1}{2} f'(m)(x-m)^2\right]_a^b + \tfrac{1}{2}\int_a^b f''(c)(x-m)^2 dx$$

$= 0$ siden $|a-m| = |b-m|$

Det følger at $\left| \int_a^b f(x)dx - f(m)(b-a) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b f''(c)(x-m)^2 dx \right|$

dvs

$$E_L = \tfrac{1}{2} \left| \int_a^b f''(c)(x-m)^2 dx \right|$$

$$\leq \tfrac{1}{2} \int_a^b |f''(c)|(x-m)^2 dx$$

$$\leq \tfrac{1}{2} \int_a^b M(x-m)^2 dx \qquad \text{der } M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$= \frac{M}{2}\left[\frac{1}{3}(x-m)^3\right]_a^b$$

$$= \frac{M}{6}\left((b-m)^3 - (a-m)^3\right) = \frac{M}{6}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{M}{24}(b-a)^3$$

Altså: Over ett intervall er lokal feil

$$E_L = \left| \int_a^b f(x)\,dx - f(m)(b-a) \right| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24}$$

Global feil: Med $n>1$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a+ih$:

$$E_G = \left| \int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right|$$

midtpunktsmetoden.

splitt opp $[a,b]$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - h f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) \right|$$

trekantulikheten

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - h f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right|$$

fra uttrykk for lokal feil

$$\le \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i h^3}{24}$$

der $M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f''(x)|$

$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \frac{Mh^3}{24} = \frac{Mnh^3}{24}$$

siden $nh = b-a$

$$= \frac{Mh^2}{24}(b-a)$$

Altså: $E_G = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \tilde{I}(n) \right| \le \frac{Mh^2}{24}(b-a)$.

om vi halverer h, så reduseres feilen omtrent med en faktor 4.

En generell fremgangsmåte for å tilnærme integralet:

1. For hvert delintervall $[x_{i-1}, x_i]$, tilnærm f med et polynom p_i av grad $k \geq 0$ (feks. v. interpolasjon)

2. Regn ut tilnærmingen

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)dx$$

Midtpunktsmetoden passer inn her: sett $p_i(x) = f(x_{i-\frac{1}{2}})$

$$\downarrow$$

tilnærming $\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-\frac{1}{2}})dx = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$,
som svarer til midtpunktsmetoden.

Trapesmetoden er en annen metode som passer inn her:
sett $p_i(x)$ til å være polynomet som interpolerer f i x_{i-1} og x_i
(så, p_i er sekanten gjennom $(f(x_{i-1}), f(x_i))$.