Fra onsdag:

Trapesmetoden regner ut tilnærmingen $\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)\,dx$ til $\int_a^b f(x)\,dx$,

Der $p_i(x)$ er polynomet som interpolerer f i x_{i-1} og x_i.

Formel for trapesmetoden:

Lagrangeform

Vi har at

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\underbrace{\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}_{h} f(x_i) + \underbrace{\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}}_{-h} f(x_{i-1}) \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x - x_{i-1})^2 \frac{f(x_i)}{h} - \frac{1}{2}(x - x_i)^2 \frac{f(x_{i-1})}{h} \right]_{x_{i-1}}^{x_i}$$

$$= \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2 \frac{f(x_i)}{h} + \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 \frac{f(x_{i-1})}{h}$$

$$= \frac{1}{2}h^2 \frac{f(x_i)}{h} + \frac{1}{2}h^2 \frac{f(x_{i-1})}{h} = \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

Trapesregelen blir dermed

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

$f(x_1) \cdots f(x_{n-1})$ kommer to ganger

$f(x_0), f(x_n)$ kommer en gang

Vi kaller denne tilnærmingen $I_{trap}(n)$

Et trapes: En firkant med to parallelle sider.

Man kan vise at

$$\left| \int_a^b f(x) - I_{trap}(n) \right| \leq \frac{\max |f''(x)|\,(b-a)}{12} h^2$$

← som for midtpunkt

her var det 24 for midtpunkt.

Eksempel: Trapesmetoden på $f(x) = x^3$, to intervaller:

$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1, \quad h = \frac{1}{2}$

Formelen gir: $\frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2))$

$$= \frac{1}{4}\left(0^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1^3\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{16}$$

Feilen i trapesmetoden: $\left| \frac{1}{4} - \frac{5}{16} \right| = \frac{1}{16}$ (dårligere enn midtpunkt)

eksakt ↗

Simpsons regel

Antar uniform partisjon med $2n$ delintervaller.

på $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ for $i = 1, \dots, n$, la p_i være polynomet av grad ≤ 2 s.a.

$$p_i(x_{2i}) = f(x_{2i})$$
$$p_i(x_{2i-1}) = f(x_{2i-1})$$
$$p_i(x_{2i-2}) = f(x_{2i-2})$$

Lagrangeform for p_i:

$$\frac{(x - x_{2i-1})(x - x_{2i})}{(x_{2i-2} - x_{2i-1})(x_{2i-2} - x_{2i})} f(x_{2i-2}) + \text{to ledd til}$$

($x_{2i-2} - x_{2i-1} = -h$, $x_{2i-2} - x_{2i} = -2h$)

$$= \frac{(x - x_{2i-1})(x - x_{2i})}{2h^2} f(x_{2i-2}) + \dots$$

Vi skal integrere dette over $[x_{2i-2}, x_{2i}]$. Bruk delvis integrasjon:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (x - x_{2i-1})(x - x_{2i})\,dx = \left[\frac{1}{2}(x - x_{2i-1})(x - x_{2i})^2 \right]_{x_{2i-2}}^{x_{2i} \to 0} - \frac{1}{2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i} \to 0} (x - x_{2i})^2\,dx$$

($x - x_{2i-1}$ deriveres, $(x - x_{2i})$ integreres)

$$= -\frac{1}{2}(-h)4h^2 - \frac{1}{6}\left[(x - x_{2i})^3 \right]_{x_{2i-2}}^{x_{2i} \to 0}$$

$$= 2h^3 - \frac{1}{6} 8h^3 = 2h^3 - \frac{4}{3}h^3 = \frac{2}{3}h^3.$$

$\rightarrow \frac{1}{3} h f(x_{2i-2})$ bidrag fra første ledd i Lagrange.

Hvis vi gjør det samme for to neste ledd i Lagrange får vi:

$$\frac{1}{3} h f(x_{2i-2}) + \frac{4}{3} h f(x_{2i-1}) + \frac{1}{3} h f(x_{2i})$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2}) + 4 f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right)$$

summer over alle delintervaller:

$$\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})\right)$$

Denne kalles $I_{simp}(2n)$

Man kan utlede feilestimatet:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_{simp}(2n)\right| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|(b-a)}{180}\,h^4$$

Slik at metoden konvergerer raskere enn ~~for~~ midtpunkt/trapes.

Hvis f er et polynom av grad ≤ 3, ser vi at metoden er eksakt (siden $f^{(4)}(x)=0$ da)