Differensialligninger

Hvorfor. La $x(t)$ være distanse

$v(t) = x'(t)$ = hastighet

$a(t) = v'(t)$ = akselerasjon.

Slipper en ball. Hva er hastigheten som en funksjon av tid?

Gravitasjonskraft: $F_G = mg$

Luftmotstand: $F_L = -cv^2$, c konstant.

Kraft: $F = mg - cv^2$ (1)

Newtons 2. lov: $F = ma = mv'$ (2)

$$\Rightarrow \quad mv' = mg - cv^2$$

$$\Rightarrow \quad v' = g - \frac{c}{m}v^2$$

$$\boxed{v'(t) = g - \frac{c}{m}v^2(t)}$$

Dette er en differensialligning, av første orden, ikke-lineær.

En førsteordens differensialligning har formen

$$\boxed{x'(t) = f(t, x(t))}\,, \quad \text{eller} \quad x' = f(t,x).$$

hvor $x(t)$ er den ukjente funksjon, som vi ønsker å finne. Gitt i tillegg en startverdi $x(t_0) = x_0$ har vi et startverdiproblem

Eksempler

① $x' = 3$, her er $f(t,x) = 3$

② $v' = g - \frac{c}{m}v^2$, $f(t,v) = g - \frac{c}{m}v^2$

③ $x' = 2t$ $f(t,x) = 2t$

④ $x' = t^3 + \sqrt{x}$, $f(t,x) = t^3 + \sqrt{x}$

⑤ $x' = x$

Løsninger: (integrer)

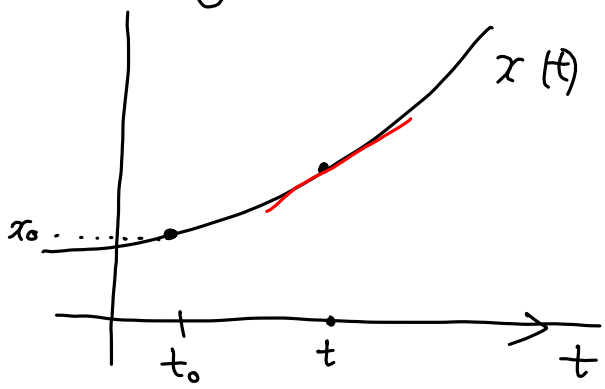
① $x' = 3 \Rightarrow x = 3t + C$

③ $x' = 2t \Rightarrow x = t^2 + C$

⑤ $x' = x \Rightarrow x = Ce^t$

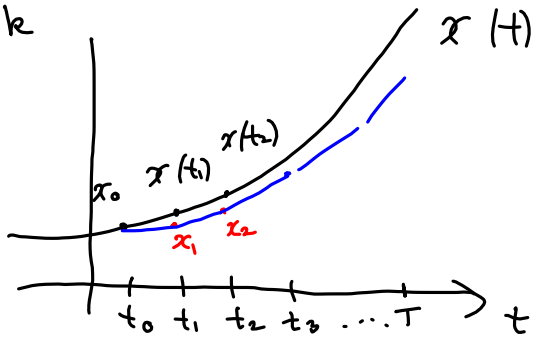
Hva sier ligningen $x'(t) = f(t, x(t))$?

Den sier hva gradienten til x er i hvert t.



Eulersmetode. Løse $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$.

Velg en liten h og definer tidspunktene $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_1 + h$, etc. Finn verdier $x_1, x_2, x_3, \ldots$ slik at $x_k \approx x(t_k)$, alle k



$k = 1$. $x'(t_0) \approx \dfrac{x(t_1) - x(t_0)}{h} = \dfrac{x(t_1) - x_0}{h}$

$\Rightarrow \dfrac{x(t_1) - x_0}{h} \approx f(t_0, x_0)$

$\Rightarrow x(t_1) \approx x_0 + h f(t_0, x_0)$.

Definer: $x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0)$

Generelt:

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k)$$
$$t_{k+1} = t_k + h$$

Eulersmetode

Eksempel: Løs numerisk $x' = t + x$ på intervallet $[0, 3]$ med N steg med Eulers metode, og $\boxed{x(0) = 0}$.

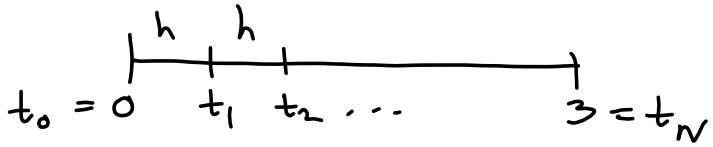
Løsning: $x' = f(t, x)$, hvor $f(t, x) = t + x$.

La $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ $[a, b] = [0, 3]$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{3}{N}.$$

$$\Rightarrow t_1 = h,\ t_2 = 2h,\ \ldots\ t_k = kh,\ \ldots$$

$$t_N = Nh = 3.$$



Euler: $x_{k+1} = x_k + h(t_k + x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Analytisk løsning?

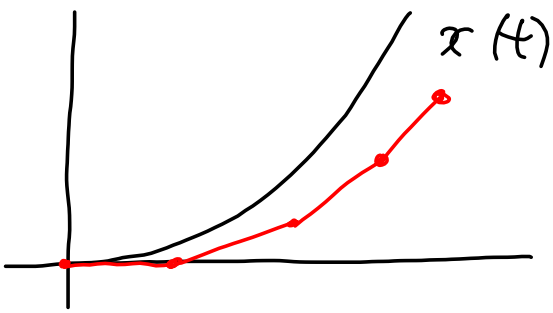
Løsningen er $x(t) = -1 - t + e^t$

Sant eller ikke sant? derivar:

$$x'(t) = -1 + e^t = x(t) + t \quad \checkmark$$

Ja: lik ligningen ✓

$$x(0) = -1 - 0 + e^0 = -1 + 1 = 0.$$



Større nøyaktighet ? Eulers midtpunkt metode.

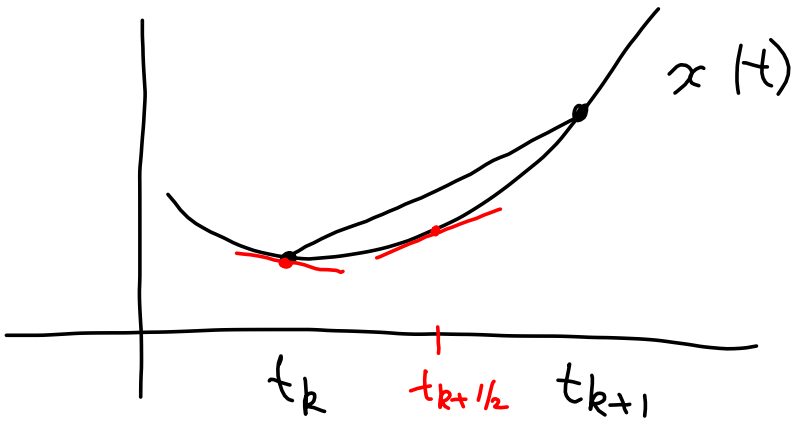
(Enkel) Eulersmetode har nøyaktighet $O(h)$

Eulers midtpunktmetode ... $O(h^2)$.

Ideen: Enkel metode: brukte: $x'(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}$ $O(h)$

Bedre approksimasjon $x'(t_{k+1/2}) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}$ $O(h^2)$

hvor $t_{k+1/2} := \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$



Midtpunktmetoden: Går fra (t_k, x_k) til (t_{k+1}, x_{k+1}) i to steg.

1. Regn ut en tilnærming til $x(t_{k+1/2})$:

La $\boxed{x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k)}$

2. Bruke at $\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h} \approx x'(t_{k+1/2})$

$= f(t_{k+1/2}, x(t_{k+1/2}))$

$\approx f(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$

Definer: $\boxed{x_{k+1} = x_k + h f(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})}$

(hvor $t_{k+1/2} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$) og la $t_{k+1} = t_k + h$.