Fra i går: Førsteordens difflikninger. Eulers metode

Eulers midtpunktsmetode for $\boxed{\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(a) &= x_0 \end{aligned}}$ (def. på $[a,b]$),

med n steg: sett $h = (b-a)/n$, $t_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$

iterasjon k:
$$\left\{\begin{aligned} x_{k+\frac{1}{2}} &= x_k + \tfrac{h}{2} f(t_k, x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + h f\left(\underbrace{t_k + \tfrac{h}{2}}_{t_{k+\frac{1}{2}}}, x_{k+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}\right\}$$ x_k tilnærming til $x(a+kh)$.

(i Euler: $x_k + hf(t_k, x_k)$)

Etter n iterasjoner: Har tilnærming til $x(b)$ ($b = a + nh$)

Eksempel $x' = t + x$ på $[\overset{a}{0}, \overset{b}{2}]$, $x(0) = 0 = x_0$

Vi prøver Euler / Euler midtpunkt med to steg.

Analytisk løsning: $x(t) = -1 - t + e^t$, så $x(b) = x(2) = -1 - 2 + e^2$
$= -3 + e^2$
≈ 4.389.

Eulers metode:
$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0)$$
$$= 0 + 1(t_0 + x_0) = 0 + 1(0+0) = 0$$
$$x_2 = x_1 + h(t_1 + x_1) = 0 + 1(1+0) = \underline{1}$$

Feil: $|(-3+e^2) - 1| = 3.3891$

Eulers midtpunktsmetode

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0, x_0) = 0 + \tfrac{1}{2}(0+0) = 0$$
$$x_1 = x_0 + hf(t_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{2}}) = 0 + 1(t_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2} + 0 = \tfrac{1}{2}$$

$$x_{\frac{3}{2}} = x_1 + \tfrac{h}{2}(x_1 + t_1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} + 1) = \tfrac{5}{4}$$
$$x_2 = x_1 + h(x_{3/2} + t_{3/2}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{13}{4} = \underline{3.25}$$

Feil: $|(-3+e^2) - \tfrac{13}{4}| \approx 1.1391$ mindre feil enn Euler.

Vi sier at en førsteordens differlikning er lineær hvis den kan skrives: $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$.

Hvis $g=0$ kalles likningen homogen, ellers inhomogen.

Teorem

Anta f, g er kontinuerlige på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$, og la F være en antiderivert til f. Da er løsningene til

$$y' + f(x)y = g(x) \quad x \in I \qquad (*)$$

gitt ved

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right) \qquad (**)$$

der $C \in \mathbb{R}$

Bevis: Multipliser $(*)$ med $e^{F(x)}$:

$$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x)$$

Siden $(e^{F(x)}y)' = (e^{F(x)})'y + e^{F(x)}y'$

$= F'(x)e^{F(x)}y + e^{F(x)}y'$

$= f(x)e^{F(x)}y + e^{F(x)}y'$, som er Venstre side her.

Vi har derfor:

$$(e^{F(x)}y)' = e^{F(x)}g(x)$$

Integrer begge sider

$$e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)\,dx + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)\,dx + C\right), \text{ som er } (**)$$

■

Eksempel

$$y' + \frac{2}{x}y = 1 \qquad x \geq 1$$
$$y(1) = 3$$

Løsning: Vi har $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = 1$

Vi har $F(x) = 2\ln x$ (antiderivert til $\frac{2}{x}$)

(**) gir

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right)$$

$$= e^{-2\ln x}\left(\int e^{2\ln x}\,dx + C\right)$$

$$= x^{-2}\left(\int x^2\,dx + C\right)$$

$$= x^{-2}\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) = \frac{1}{3}x + Cx^{-2}$$

$y(1) = 3$: $3 = \frac{1}{3}\cdot 1 + C\cdot 1^{-2} \Rightarrow C = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3x^2}$$

Test

VS: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{3} - \frac{16}{3x^3} + \frac{2}{3} + \frac{16}{3x^3} = 1$

HS: 1

$y(1) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$

Eksempel $y' + 3x^2 y = 3x^2$

Løsning: Vi har $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2$. Vi setter $F(x) = x^3$

(**) gir $y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right)$

$$= e^{-x^3}\left(\int \underbrace{e^{x^3} 3x^2\,dx}_{u = x^3,\ du = 3x^2 dx} + C\right)$$

$$= e^{-x^3}\left(\int e^u\,du + C\right)$$

$$= e^{-x^3}\left(e^{x^3} + C\right) = 1 + Ce^{-x^3}$$

Test: $\begin{cases} VS: & y' + 3x^2 y = -3x^2 C e^{-x^3} + 3x^2 + C 3x^2 e^{-x^3} = 3x^2 \\ HS: & 3x^2 \end{cases}$

Entydighet av løsninger av lineære førsteordens likninger

Teorem

Initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y' + f(t)y &= g(t), \quad t \geq t_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{3}$$

har den unike løsningen

$$y(t) = e^{-F(t)} \left(\int_{t_0}^{t} e^{F(s)} g(s)\, ds + y_0 \right) \tag{4}$$

der $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$ (en spesiell antiderivert til f).

Bevis: Det er klart at $F'(t) = f(t)$, siden $\frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds = f(t)$, så F er en spesiell antiderivert.

En løsning av (3) kan derfor skrives

$$y(t) = e^{-F(t)} \left(\int e^{F(t)} g(t)\, dt + C \right) \quad (C \text{ er ukjent})$$

Vi har:

$$\int e^{F(t)} g(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} e^{F(s)} g(s)\, ds + \tilde{C}$$

siden har samme derivert.

Alle løsninger av (3) kan derfor skrives

$$y(t) = e^{-F(t)} \left(\int_{t_0}^{t} e^{F(s)} g(s)\, ds + D \right) \quad (D = C + \tilde{C})$$

Hva er D? Siden $F(t_0) = 0$ (pga. nedre grense like), så er (sett inn $t = t_0$)

$$y_0 = e^0 (0 + D) = D$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-F(t)} \left(\int_{t_0}^{t} e^{F(s)} g(s)\, ds + y_0 \right), \text{ som vi skulle vise.}$$

Unikhet av løsningen:

Anta $\tilde{y} \neq y$ er en annen løsning av (3): Vi kan skrive

$$\tilde{y}(t) = e^{-F(t)}\left(\int_{t_0}^{t} e^{F(s)} g(s)\,ds + \tilde{C} \right)$$

Sett inn $\tilde{y}(t_0) = y_0$: $y_0 = e^{0}(0 + \tilde{C}) = \tilde{C}$, s.a.

$$y(t) = e^{-F(t)}\left(\int_{t_0}^{t} e^{F(s)} g(s)\,ds + y_0 \right),$$

slik at $\tilde{y} = y$. Dermed er y en unik løsning ■

Eksempel:

Løs $y' - 2y = t$, $t \geq 0$

$y(0) = \frac{1}{2}$

Løsning:

Her er $f(t) = -2$, $g(t) = t$

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t (-2)\,ds = [-2s]_0^t = -2t$$

I stedet for formelen: Gang med integrerende faktor $e^{F(t)} = e^{-2t}$

$$e^{-2t}y' - e^{-2t}2y = te^{-2t}$$

$$(e^{-2t}y)' = te^{-2t}$$

$$e^{-2t}y = \int te^{-2t}\,dt \overset{\text{delvis int.}}{=} -\frac{1}{2}te^{-2t} + \int \frac{1}{2}e^{-2t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + Ce^{2t}$$

$y(0) = \frac{1}{2}$: $\quad \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{4} + C$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{2t}$$

Med formel (4) i stedet:

$$y(t) = e^{-F(t)}\left(\int_0^t e^{F(s)} g(s)\,ds + y_0\right)$$

$$= e^{2t}\left(\int_0^t e^{-2s} s\,ds + \frac{1}{2}\right)$$

delvis integrasjon som over

$$= \cdots = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{2t}$$ som over.