# Kap. 10.4 i Kalkulus: Separable differensialligninger

Vi sier at en diff.likning er separabel hvis den kan skrives

$$q(y)\,y' = p(x)$$

(Altså: kun $y$ på VS, kun $x$ på HS)
Kan ofte løses ved integrasjon.

1. $y' = e^{x+y}$ er separabel siden den kan skrives:

$$\underbrace{e^{-y}}_{q(y)}\,y' = \underbrace{e^{x}}_{p(x)}$$

Integrer begge sider:

$$\int e^{-y}y'\,dx = \int e^{x}\,dx$$

$u = y(x)$
$du = y'(x)\,dx$

$$\Downarrow$$

$$\int e^{-u}\,du = \int e^{x}\,dx$$

$$-e^{-u} = e^{x} + C$$
$$-e^{-y} = e^{x} + C$$
$$e^{-y} = -e^{x} - C$$
$$-y = \ln(-e^{x} - C)$$
$$y(x) = -\ln(-e^{x} - C)$$

Test: VS: $e^{-y}y' = e^{\ln(-e^x-C)}\,\dfrac{(-(-e^x))}{-e^x-C} = (-e^x-C)\dfrac{e^x}{-e^x-C} = e^x$

HS: $e^x$

2. $e^{-x}y' = 1+y^2$ er separabel: Del med $1+y^2$, og med $e^{-x}$:

$$\underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{q}\,y' = \underbrace{e^{x}}_{p}$$

Kan løses, siden $\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan y + C$

Vi får: $\arctan y = e^x + C$

$$y = \tan(e^x + C)$$

3. Lineære førsteordens likninger: Litt vanskelig å separere:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Løses med integrerende faktor.

4. Noen ganger: Vanskelig å se at er separabel:

Oppgave 10.4.1d): $xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$

Skriv om høyreside: $= 1 + x^2 + y^2(1+x^2)$

$$= (1+x^2)(1+y^2)$$

$$\Downarrow$$

$$xyy' = (1+x^2)(1+y^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{y}{1+y^2}}_{q(y)}y' = \underbrace{\frac{1+x^2}{x}}_{p(x)}$$

$u = 1+y^2$

$du = 2yy'dx$

$\frac{1}{2}du = yy'dx$

Eksempel: $e^{-x}yy' = -1$

Løsning: separabel: $yy' = -e^x$

$$\int yy'(x)\,dx = -\int e^x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -e^x + C \qquad (\Rightarrow \tfrac{1}{2} = -1 + C \Rightarrow C = \tfrac{3}{2})$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2(C - e^x)}$$

C kan bestemmes hvis vi har initialverdien $y(0) = 1$:

$$1 = \pm\sqrt{2(C-1)} \Rightarrow 1 = 2(C-1)$$

$$\tfrac{1}{2} = C - 1 \Rightarrow C = \tfrac{3}{2}$$

$$y(x) = \sqrt{2\left(\frac{3}{2} - e^x\right)}$$

måtte velge +

**Eksempel: Vekst i en dyrepopulasjon**

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{N}\right)$$

$y(t)$: bestandens størrelse

$N$: øvre grense bestanden

$y \to N \Rightarrow 1 - \frac{y}{N} \to 0 \Rightarrow y' \to 0$

$y' = ry$ ligningen uten kravet om $N$ som øvre grense.
$y$ vil kan vokse eksponensielt ( $y(t) = Ce^{rt}$ )

**Likningen er separabel**: kan skrives $\frac{1}{y(1-\frac{y}{N})} y' = r$

Delbrøksoppspalting: $\frac{1}{y(1-\frac{y}{N})} = \frac{a}{y} + \frac{b}{1-\frac{y}{N}} = \frac{a(1-\frac{y}{N}) + by}{y(1-\frac{y}{N})} = \frac{a + (b - \frac{a}{N})y}{y(1-\frac{y}{N})}$ (1)

Vi må da ha: $a = 1,\ b - \frac{a}{N} = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = \frac{1}{N}$

$$\int \frac{y'}{y(1-\frac{y}{N})}\,dt = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{N}}{1-\frac{y}{N}}\right) y'\,dt = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{N-y}\right) y'\,dt$$

$$= \ln|y| - \ln|N-y| + C$$

$$= \ln\left|\frac{y}{N-y}\right| + C = \int r\,dt = rt + C'$$

Vi har: $\ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = rt + C$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{y}{N-y}\right| = e^{rt+C} = \underbrace{e^C}_{\neq 0} e^{rt}$$

$$\frac{y}{N-y} = \underbrace{k'}_{\text{ingen krav om } \neq 0} e^{rt}$$

$$y = ke^{rt}(N-y)$$

$$y(1 + ke^{rt}) = ke^{rt}N \qquad (k_2 = \tfrac{1}{k})$$

$$y(t) = \frac{ke^{rt}N}{1+ke^{rt}} = \frac{N}{1+k_2e^{-rt}}$$

Anta $y(0) = y_0$:
sett inn $t = 0$: $y_0 = \frac{N}{1+k_2} \Rightarrow y_0 + y_0k_2 = N \Rightarrow k_2 = \frac{N-y_0}{y_0}$

Hva skjer når $y(0) < N$ ? Da er $k_2 > 0$

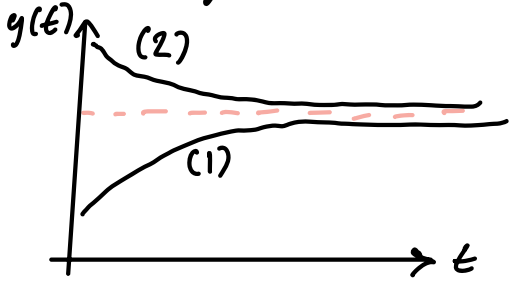
$y(0) > N$ ? Da er $k_2 < 0$

$y(0) < N$ : $y(t) = \dfrac{N}{\underbrace{1 + k_2 e^{-rt}}_{>1}} < N$ (1)

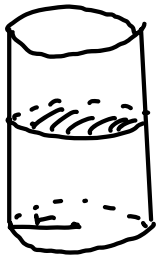
$y(0) > N$ : $y(t) = \dfrac{N}{\underbrace{1 + k_2 e^{-rt}}_{<1}} > N$ (2)

I begge tilfeller har vi at $e^{-rt} \to 0$ når $t \to \infty$,

slik at vi ønsket får $N$ i grensen for $y(t)$ når $t \to \infty$.




Eksempel En væske strømmer ut av et lite hull i bunnen av en sylinder med radius $r$



$h(t)$ : Høyden til væsken ved tid $t$

$y(t)$ : væskens volum ved tid $t$ : $y(t) = \pi r^2 h(t)$

$v(t)$ : hastigheten til væsken som renner ut.

$A$ : arealet til hullet.

Toricelli's lov: $v(t) = k\sqrt{h(t)} = k\sqrt{\dfrac{y(t)}{\pi r^2}} = \dfrac{k}{r\sqrt{\pi}}\sqrt{y(t)}$

Volum av det som renner ut mellom $t$ og $t+\Delta t$:

$y(t) - y(t+\Delta t) \approx v(t) \cdot A \cdot \Delta t$

del på $\Delta t$, og la $\Delta t \to 0$:

$-y'(t) = A\,v(t) \quad \Rightarrow \quad -y'(t) = \underbrace{\dfrac{Ak}{r\sqrt{\pi}}}_{k}\sqrt{y(t)} \quad \Rightarrow \quad -y'(t) = k\sqrt{y(t)}$

Denne er separabel, og kan skrives

$$y^{-\frac{1}{2}} y' = -k$$

$$\int_{u=y} y(t)^{-\frac{1}{2}} y'(t)\,dt = \int -k\ dt$$

$$2\sqrt{y(t)} = -kt + C$$

$$y(t) = \left(-\frac{k}{2}t + \underbrace{D}_{C/2}\right)^2$$

Her er k og D ukjente. Disse kan bestemmes ved to opplysninger:

1) $y(0) = V$ (kjent opprinnelig volum) $\Rightarrow$ $V = (0+D)^2 \Rightarrow D = \sqrt{V}$

2) Etter 10 minutter har $\frac{3}{4}$ av vannet hav rent ut:

$$y(10) = \frac{1}{4}V \Rightarrow \frac{1}{4}V = \left(-\frac{k}{2}10 + \sqrt{V}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{V}}{2} = -5k + \sqrt{V}$$

$$k = \frac{\sqrt{V} - \frac{\sqrt{V}}{2}}{5} = \frac{\sqrt{V}}{10}$$