Sek 10.5 i Kalkulus

Annenordens lineære likninger er på formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x). \qquad (1)$$

I dag: Begrenser oss til at p og q er konstanter, $h = 0$ (homogen) (annenordens likninger med konstante koeffisienter, homogene).

Hva blir løsningene?

Viktig egenskap 1: Hvis y_1 og y_2 løser (1) så gjør også $c_1y_1 + c_2y_2$ det:

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{0} + c_2\underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{0} = 0$$

Viktig egenskap 2: Vi kan finne y_1 og y_2 slik at enhver annen løsning kan skrives som $c_1y_1 + c_2y_2$.

Siden $y' = qy$ har løsning $y(x) = e^{qx}$, så er det naturlig å gjette at $y'' + py' + qy = 0$ har løsning på formen e^{rx}.

Hva må da r være?

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$$

$$\text{Del med } e^{rx}$$

$$r^2 + pr + q = 0$$

$y(x) = e^{rx}$ er altså en løsning hvis r løser den **karakteristiske likningen** $r^2 + pr + q = 0$

Vi skal se at følgende holder:

(i) Hvis kar. likning har to forskjellige reelle røtter r_1 og r_2:
Generell løsning av $y''+py'+qy=0$ er da $y(x)=Ce^{r_1x}+De^{r_2x}$.

(ii) Hvis kar. likning har en reell (dobbel)rot r:
Generell løsning er da $y(x)=Ce^{rx}+Dxe^{rx}$

(iii) Hvis kar. likning har komplekse røtter $r=a+ib$, $\bar{r}=a-ib$:
Generell løsning er da $y(x)=e^{ax}(C\cos bx+D\sin bx)$

Litt om bevis (i): Viktig egenskap! sier at $Ce^{r_1x}+De^{r_2x}$ også er løsning. (hopper over at alle løsninger har denne formen)
Hvorfor gir initialbetingelsene $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$ oss en unik løsning?

$y(0)=y_0$: $Ce^{r_1\cdot 0}+De^{r_2\cdot 0}=y_0$
$y'(0)=y_1$: $Cr_1e^{r_1\cdot 0}+Dr_2e^{r_2\cdot 0}=y_1$
} hvis $r_1\neq r_2$: får to forskjellige likninger som lar seg løse.

Eksempel: Løs $y''-6y'+5y=0$ $\quad y(0)=2$, $y'(0)=6$

Løsning: kar. likning: $r^2-6r+5=0$, som har røtter

$$\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}$$, slik at $r_1=5$, $r_2=1$

Generell løsning: $y(x)=Ce^{5x}+De^{x}$, $y'(x)=5Ce^{5x}+De^{x}$

$y(0)=2$: $C+D=2$
$y'(0)=6$: $5C+D=6$
} $4C=4 \Rightarrow C=1 \Rightarrow D=1$

Derfor er $y(x)=e^{5x}+e^{x}$

Litt om bevis (ii): Hvorfor er xe^{rx} også en løsning?

Hvis r_1 er en dobbelrot så kan kar. likning skrives:

$$r^2+pr+q=(r-r_1)^2=r^2-2r_1r+r_1^2$$

slik at $p=-2r_1$, $q=r_1^2$

Vi setter inn $y(x)=Xe^{r_1x}$ i $y''+py'+qy=0$:
(merk: $y'=(1+r_1x)e^{r_1x}$, $y''=(2r_1+r_1^2x)e^{r_1x}$)

$$y'' + py' + qy = y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y$$

$$= (2r_1 + r_1^2 x)e^{r_1 x} - 2r_1(1 + r_1 x)e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}$$

$$= \underbrace{(2r_1 - 2r_1)}_{0} e^{r_1 x} + x\underbrace{(r_1^2 - 2r_1^2 + r_1^2)}_{0} e^{r_1 x}$$

$$= 0$$

Eksempel: Løs $y'' - 6y' + 9y = 0$ $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Løsning: kar. likning: $r^2 - 6r + 9 = 0$, slik at $r_1 = 3$ er dobbelrot.

Generell løsning: $y(x) = Ce^{3x} + Dxe^{3x}$, $y'(x) = 3Ce^{3x} + D(1 + 3x)e^{3x}$

$y(0) = 0$: $C = 0$

$y'(0) = 1$: $D(1 + 3\cdot 0)e^0 = 1 \Rightarrow D = 1$

$$\Rightarrow y(x) = xe^{3x}$$

Litt om bevis (iii): Antar r_1 og r_2 er komplekse. $\rightarrow \bar{r}_1$

Fra (i) vet vi at $Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$ er en generell kompleks løsning av likningen. (C og D kan være komplekse)
En reell løsning kan vi få ved å velge C og D som konjugerte av hverandre:

$$Ce^{r_1 x} + \bar{C}e^{r_2 x} = Ce^{(a+ib)x} + \bar{C}e^{(a-ib)x}$$

$A + iB$

$$= (A + iB)e^{(a+ib)x} + (A - iB)e^{(a-ib)x}$$

$$= A\underbrace{\left(e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x}\right)}_{e^{ax}\left(e^{ibx} + e^{-ibx}\right)} + iB\underbrace{\left(e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x}\right)}_{e^{ax}\, 2i \sin bx}$$

$$= e^{ax} 2\cos bx$$

$$= Ae^{ax} 2\cos bx - Be^{ax} 2\sin bx$$

$$= e^{ax}(\underbrace{2A}_{C}\cos bx - \underbrace{2B}_{D}\sin bx)$$ (som er formen vi skulle frem til).

Eksempel: Løs $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

Løsning: kar.likning: $r^2 - 4r + 13 = 0$

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \Rightarrow \begin{matrix} a & b \\ r_1 = 2 + 3i \\ r_2 = 2 - 3i \end{matrix}$$

Generell løsning: $y(x) = e^{2x}(C\cos 3x + D\sin 3x)$.

$$y'(x) = e^{2x}(2C\cos 3x + 2D\sin 3x - 3C\sin 3x + 3D\cos 3x)$$

$$= e^{2x}((2C+3D)\cos 3x + (2D-3C)\sin 3x)$$

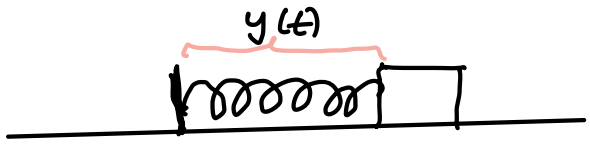
$y(0) = 2$: $e^{2\cdot 0}(C\cos 0 + D\sin 0) = 2 \Rightarrow C = 2$

$y'(0) = 1$: $2C + 3D = 1 \Rightarrow 4 + 3D = 1 \Rightarrow 3D = -3 \Rightarrow D = -1$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = e^{2x}(2\cos 3x - \sin 3x)$$

Eksempel En kloss festet i en fjær på vannrett underlag, med friksjon.



Krefter som virker:

1) Trekkraft, i motsatt retning av bevegelsesretningen

$F_1 = -ky$ (Hookes lov)

2) Friksjonskraft: $F_2 = -\mu y'$ (proporsjonal med fart, motsatt av bevegelsretning)

Newtons 2.lov: $F = ma = F_1 + F_2$

$$my'' = -ky - \mu y'$$

$$y'' + \frac{\mu}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

kar.likning: $r^2 + \frac{\mu}{m}r + \frac{k}{m} = 0$

$$r = \frac{-\frac{\mu}{m} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m}$$

Hvis $\mu^2 < 4km$ får vi her komplekse røtter $a \pm ib$, der $a = -\frac{\mu}{2m}$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}(C\cos bt + D\sin bt)$$

negativ, dempes når t øker.

C og D kan bestemmes hvis vi vet fart/posisjon ved tid $t=0$

Ser også: $C\cos bt + D\sin bt$ er periodisk med periode $\frac{2\pi}{b}$

