Seksjon 10.6 i Kalkulus: Annenordens inhomogene likninger med konstante koeffisienter:

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad \text{der } f(x) \neq 0$$

Vi begrenser oss til noen spesielle høyresider $f(x)$.

Lemma: Anta y_p løser den inhomogene likningen (partikulær løsning)

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

Enhver annen løsning y av (1) er da på formen $y = y_p + y_h$, der y_h er en vilkårlig løsning av den homogene likningen

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

Bevis: Anta y_p løser (1), y_h løser (2). Vi har at

$$(y_p + y_h)'' + p(y_p + y_h)' + q(y_p + y_h)$$

$$= \underbrace{(y_p'' + py_p' + qy_p)}_{f(x)} + \underbrace{(y_h'' + py_h' + qy_h)}_{0} = f(x)$$

s.a. $y_p + y_h$ løser (1)

Omvendt, anta $\tilde{y}$ løser (1). Vi må vise at vi kan skrive $\tilde{y} = y_p + y_h$, der y_h løser (2).

Definer $y_h = \tilde{y} - y_p$. Vi har at

$$y_h'' + py_h' + qy_h = (\tilde{y} - y_p)'' + p(\tilde{y} - y_p)' + q(\tilde{y} - y_p)$$

$$= \underbrace{(\tilde{y}'' + p\tilde{y}' + q\tilde{y})}_{f(x)} - \underbrace{(y_p'' + py_p' + qy_p)}_{f(x)}$$

$$= 0$$

slik at y_h løser (1)

Vi har nå $\tilde{y} = y_p + \underbrace{\tilde{y} - y_p}_{y_h} = y_p + y_h$ som var det vi skulle vise. ∎

Løsningsstrategi, inhomogene likninger:

1. Finn en partikulær løsning y_p til (1) ("gjetter" på y_p som ligner på høyresiden).
2. Finn generell løsning y_h til (2). (i kar. likning)

   Fra sist: (i) $y_h(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$ hvis to reelle røtter $r_1 \neq r_2$

   (ii) $y_h(x) = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}$ hvis r_1 dobbelrot

   (iii) $y_h(x) = e^{ax}(C\cos(bx) + D\sin(bx))$ hvis komplekse røtter $a \pm ib$
3. Generell løsning til (1) er da $y_p + y_h$
4. En konkret kan vi finne ved hjelp av en initialbetingelse.

Eksempel: Vi ser på $y'' - 6y' + 5y = 5x + 4$ $\quad y(0) = 4$, $y'(0) = 7$

Løsning: Partikulær løsning: Gjett på $y_p = Ax + B \Rightarrow y_p' = A$, $y_p'' = 0$

$$y_p'' - 6y_p' + 5y_p = 0 - 6A + 5Ax + 5B$$
$$= 5Ax + 5B - 6A = 5x + 4$$

ser at: $5A = 5 \Rightarrow A = 1$

$5B - 6A = 4 \Rightarrow 5B - 6 = 4 \Rightarrow 5B = 10 \Rightarrow B = 2$

$$\Downarrow$$
$$y_p = Ax + B = x + 2$$

Generell løsning av homogen likning:

Kar.likning: $r^2 - 6r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow r_1 = 5,\ r_2 = 1$

Derfor: $y_h = Ce^{5x} + De^{x}$

Generell løsning: $y = y_p + y_h = x + 2 + Ce^{5x} + De^{x}$

Initialbetingelser: $y' = 1 + 5Ce^{5x} + De^{x}$

$y(0) = 4$: $2 + C + D = 4 \Rightarrow C + D = 2$

$y'(0) = 7$: $1 + 5C + D = 7 \Rightarrow 5C + D = 6$

$4C = 4 \Rightarrow C = 1,\ D = 1$

$$\Rightarrow y(x) = x + 2 + e^{5x} + e^{x}$$

Mer generelt: for $y'' + py' + qy = f(x)$, med f et polynom av grad n:

1. Gjett $y_p(x)$ et polynom av grad n også, dvs
$$y_p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n.$$

2. Hvis $r=0$ er en rot i kar.likning $r^2 + pr + q = 0$, prøver
$$y_p(x) = x(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n), \text{ eller}$$
$$y_p(x) = x^2(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) \text{ i stedet}$$
} Vi sier at vi går opp 1 eller 2 grader

gjett denne når $r=0$ er dobbelrot.

Dette kalles ukjente koeffisienters metode ($c_0, c_1, \ldots, c_n$ er de ukjente koeffisientene)

Eksempel: Finn generell løsning av $y'' - 2y' = 6 - 12x$

Løsning: **partikulær løsning:** Siden $r=0$ er en (enkel) rot i kar.likning ($r^2 - 2r = 0$):

Vi prøver: $y_p = x(Ax+B) = Ax^2 + Bx \Rightarrow$ $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$

$$y_p'' - 2y_p' = 2A - 2(2Ax + B) = 2A - 2B - 4Ax$$
$$\| \quad\quad 6 - 12x$$

$2A - 2B = 6$, $-4A = -12$ $\Rightarrow$ $B = 0$, $A = 3$

$\Rightarrow y_p = 3x^2$

y_h: $r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2 \Rightarrow y_h(x) = Ce^{2x} + De^0 = Ce^{2x} + D$

Generell løsning: $y = y_p + y_h = 3x^2 + Ce^{2x} + D$

Ukjente koeffisienters metode for andre høyresider:

Hvis likningen er $y'' + py' + qy = e^{ax} g(x)$ ← polynom av grad n

1. Gjett på $y_p(x) = e^{ax} p_n(x)$, der p_n er et polynom av samme grad som g

2. Hvis $r=a$ er rot i kar.likning: Gå opp en, eller to, grader,

slik at vi prøver $y_p(x) = e^{ax} x\, p_n(x)$, eller $e^{ax} x^2 p_n(x)$ → $a=2$

Eksempel: Finn partikulær løsning av $y'' - y' - 2y = e^{2x}(1+x)$

kar.likning: $r^2 - r - 2 = 0$, røttene blir $r_1 = 2$, $r_2 = -1$

Siden $a=2$ er rot i kar.likning gjetter vi:

$y_p(x) = e^{2x} x(Ax+B) = e^{2x}(Ax^2+Bx)$

$y_p'(x) = e^{2x}(2Ax^2+2Bx+2Ax+B) = e^{2x}(2Ax^2+2(A+B)x+B)$

$y_p''(x) = e^{2x}(4Ax^2+4(A+B)x+2B+4Ax+2(A+B))$

$= e^{2x}(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B)$

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = e^{2x}\begin{pmatrix} 4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A+4B \\ -2Ax^2 - 2(A+B)x - B \\ -2Ax^2 - 2Bx \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 6Ax \quad 2A+3B$$

$$\| \quad \| \quad \|$$

$$e^{2x}(\quad x \quad + \quad 1 \quad)$$

$x = \frac{1}{6}$ $\qquad 2\cdot\frac{1}{6} + 3B = 1$

$3B = \frac{2}{3} \Rightarrow B = \frac{2}{9}$

$y_p(x) = e^{2x}(Ax^2+Bx) = e^{2x}(\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x)$

Hvis likningen er $y'' + py' + qy = e^{ax}(A\cos(bx) + B\sin(bx))$

1. Gjett $y_p(x) = e^{ax}(c_0\cos(bx) + c_1\sin(bx))$ (c_0, c_1 ukjente)

2. Hvis $r = a+ib$ er rot i den karakteristiske likningen:
gå opp en grad: prøv $y_p(x) = e^{ax} x(c_0\cos bx + c_1\sin bx)$

Eksempel: Finn partikulær løsning av $y'' + y = e^{2x} 8\cos x$

Løsning: kar.likning: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$, som er $\neq a+ib = 2+i$

Derfor trenger vi ikke gå opp en grad, og prøver

$y_p(x) = e^{2x}(c_0\cos x + c_1\sin x)$

$$y_p'(x) = e^{2x}(2c_0\cos x + 2c_1\sin x - c_0\sin x + c_1\cos x)$$

$$= e^{2x}((2c_0 + c_1)\cos x + (2c_1 - c_0)\sin x)$$

$$y_p''(x) = e^{2x}\begin{pmatrix}(4c_0 + 2c_1)\cos x + (4c_1 - 2c_0)\sin x \\ \because (2c_1 - c_0)\cos x - (2c_0 + c_1)\sin x\end{pmatrix}$$

$$= e^{2x}((3c_0 + 4c_1)\cos x + (3c_1 - 4c_0)\sin x)$$

$$y_p'' + y_p = e^{2x}(\underbrace{(4c_0 + 4c_1)}_{8}\cos x + \underbrace{(4c_1 - 4c_0)}_{0}\sin x) = e^{2x}\,8\cos x$$

$$8c_0 = 8 \Rightarrow c_0 = c_1 = 1 \qquad c_0 = c_1$$

$$\Downarrow$$

$$y_p(x) = e^{2x}(\cos x + \sin x)$$

Test:

$$y_p'(x) = e^{2x}(2\cos x + 2\sin x - \sin x + \cos x) = e^{2x}(3\cos x + \sin x)$$

$$y_p''(x) = e^{2x}(6\cos x + 2\sin x - 3\sin x + \cos x) = e^{2x}(7\cos x - \sin x)$$

$$y_p'' + y_p = e^{2x}(7\cos x - \sin x + \cos x + \sin x)$$

$$= e^{2x}(8\cos x) = e^{2x}\,8\cos x,$$ som var högresidan i likningen.