Kap. 10 i kompendiet: Nullpunktsmetoder

Hvordan kan vi løse likningen $f(x)=0$ numerisk?

Skal se på tre metoder for å finne nullpunkter, der vi starter med å gjette på ett nullpunkt, og kjører flere iterasjoner for å komme nærmere nullpunktet.

Teorem 5.2.1 i kalkulus:

Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn, da finnes en $c \in (a,b)$ s.a. $f(c)=0$

Halveringsmetoden: Anta f definert på $[a,b]$, der $f(a)f(b)<0$ (motsatt fortegn)

1. Sett $a_0 = a$, $b_0 = b$, $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ $([a_0,b_0] = [a,b])$

2. Hvis $f(a_0)f(m_0)<0$: sett $a_1 = a_0$, $b_1 = m_0$ ($[a_1,b_1]$ er første halvdel av $[a_0,b_0]$)

   Hvis $f(b_0)f(m_0)<0$: sett $a_1 = m_0$, $b_1 = b_0$ ($[a_1,b_1]$ er andre halvdel av $[a_0,b_0]$)

Dette itereres: Anta at vi har $[a_k,b_k]$ etter k iterasjoner: $(m_k = (a_k+b_k)/2$

Hvis $f(a_k)f(m_k)<0$: sett $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = m_k$ ($[a_{k+1},b_{k+1}]$ er første halvdel av $[a_k,b_k]$

Hvis $f(b_k)f(m_k)<0$: sett $a_{k+1} = m_k$, $b_{k+1} = b_k$ ($[a_{k+1},b_{k+1}]$ er andre halvdel av $[a_k,b_k]$)

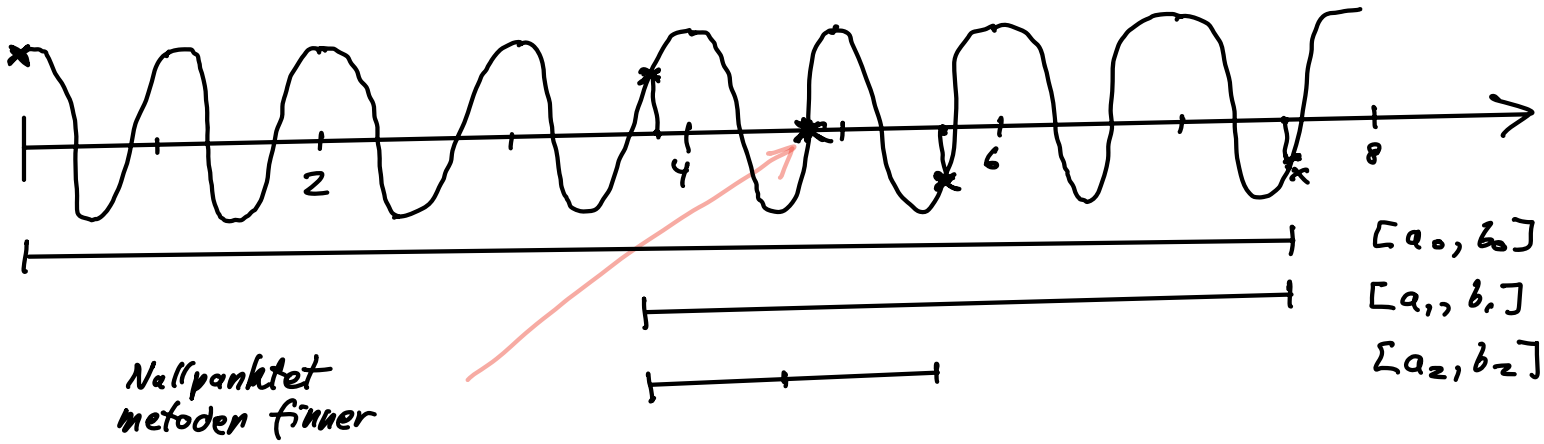
Etter k iterasjoner: Bredden på $[a_k,b_k]$ er $2^{-k}(b-a)$

Vi returnerer m_k når intervallet er lite nok, eller når $f(m_k)$ er liten nok.

Merk: Metoden vil alltid konvergere mot et nullpunkt, pga. teorem 5.2.1.

Eksempel Sett $f(x) = \cos(2\pi x)$, der $[a,b] = [0, 7.6]$

Vi ser at $f(a) = 1$, $f(b) = \cos(15.2\pi) = \cos(1.2\pi) < 0$



1. Vi setter $[a_0, b_0] = [0, 7.6]$, $m_0 = \frac{0+7.6}{2} = 3.8$

$f(a_0) = f(0) = 1 > 0$

$f(b_0) = f(7.6) = \cos(15.2\pi) < 0$

$f(m_0) = f(3.8) = \cos(7.6\pi) > 0$

$\Downarrow$

$[m_0, b_0]$ velges $\Rightarrow [a_1, b_1] = [3.8, 7.6]$, $m_1 = 5.7$

2. $f(a_1) = \cos(7.6\pi) > 0$

$f(b_1) = \cos(15.2\pi) < 0$

$f(m_1) = \cos(11.4\pi) < 0$ $\quad (\cos(-0.8\pi) < 0)$

$[a_1, m_1]$ velges $\Rightarrow [a_2, b_2] = [3.8, 5.7] \Rightarrow m_2 = 4.75$

3. $f(a_2) = \cos(7.6\pi) > 0$

$f(b_2) = \cos(11.4\pi) < 0$

$f(m_2) = \cos(9.5\pi) = 0$

Metoden stopper, siden vi har funnet et nullpunkt. $f(x^*) = 0$

Hvor mange iterasjoner trengs for at $|m_k - x^*| \leq \varepsilon$?

Siden $x^* \in [a_k, b_k]$, så er $|m_k - x^*| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2} 2^{-k}(b-a)$

$= 2^{-k-1}(b-a) \leq \varepsilon$

$\Updownarrow$

$2^{k+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$

$\Updownarrow$

$k+1 \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$

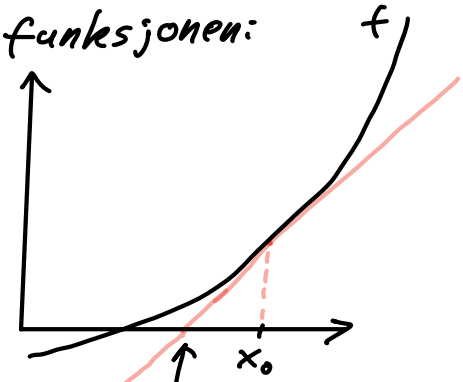
$$k \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1$$

Newtons metode for å finne nullpunkt til f:

Antar at f er deriverbar, og vi velger en startverdi x_0

Tangenten til f i x_0 er $T_1 f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Metoden velger ett nullpunkt for tangenten som tilnærming til nullpunkt for funksjonen:



tilnærming fra Newtons metode.

Metoden blir: Løs $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$

$$f'(x_0)x = f'(x_0)x_0 - f(x_0)$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Vi gjør dette iterativt: $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Metoden terminerer når vi er tilstrekkelig nær et nullpunkt x^*, dvs. når $|x_k - x^*| \leq \varepsilon$. (siden vi ikke vet x^*, så ser man ofte på $|x_{k+1} - x_k|$ i stedet)

Eksempel kjør to steg med Newtons metode for $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 2$

Løsning: Ett steg Newton: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$

Første steg: $x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 2 - \frac{4-2}{4} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

feil: $|\frac{3}{2} - \sqrt{2}| \approx 0.0858$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{9}{4} - 2}{2 \cdot (3/2)} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

feil: $|\frac{17}{12} - \sqrt{2}| \approx 0.0025$

Anta x^* er nullpunktet vi leter etter. Hvor raskt går

$$e_k = x_k - x^*$$

mot 0?

Fra $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ følger $e_{k+1} = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$= \frac{e_k f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1)$$

Merk at Taylorutviklingen (om x_k, grad 1 + restledd)

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(c)}{2!}(x^* - x_k)^2$$

$f(x^*) = 0$, $(x^* - x_k) = -e_k$, $(x^* - x_k)^2 = e_k^2$, $c \in [x_k, x^*]$

kan skrives om til:

$$e_k f'(x_k) - f(x_k) = \frac{f''(c)}{2!} e_k^2$$

Vi setter inn dette i (1):

$$e_{k+1} = \frac{\frac{f''(c)}{2!} e_k^2}{f'(x_k)} = \frac{f''(c)}{2f'(x_k)} e_k^2 = K e_k^2 \quad (2)$$

K

Vi sier at en numerisk metode har orden p hvis det finnes $K > 0$ s.a. $|e_{k+1}| \leq K |e_k|^p$

Vi har da vist i (2) at Newtons metode har orden 2 (i hvertfall når $f'(x)$ ikke kan bli vilkårlig nær 0).

Orden 2 kalles også for kvadratisk konvergens.

Dobler antall riktig sifre etter hver iterasjon:

Hvis $e_k \approx 10^{-m}$, så er $e_{k+1} \leq K e_k^2 \approx K (10^{-m})^2 = K\, 10^{-2m}$

m riktige sifre.

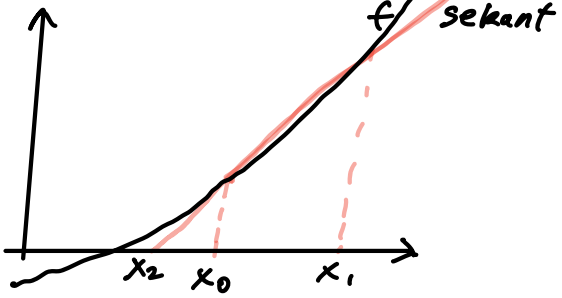
2 m riktige sifre

Sekantmetoden for å finne nullpunkt til f:

Velger to startpunkter x_0, x_1. Sekanten til f gjennom disse er

$$s(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Metoden velger et nullpunkt for sekanten som tilnærming til nullpunkt for funksjonen



Metoden blir: Løs $f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) = 0$

$$\vdots$$

$$x_2 = x = x_0 - f(x_0)\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}$$

Vi gjør dette iterativt: $x_k = x_{k-2} - f(x_{k-2})\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{f(x_{k-1})-f(x_{k-2})}$

i boka: $x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{f(x_{k-1})-f(x_{k-2})} f(x_{k-1})$

Eksempel: Kjør to steg med sekantmetoden for $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 2$

Løsning: steg 1: $x_2 = x_1 - \frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} f(x_1)$

$$= 2 - \frac{2-3}{2-7}\cdot 2 = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$$

feil: $|1.6 - \sqrt{2}| \approx 0.1858$

steg 2: $x_3 = x_2 - \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} f(x_2)$

$$= \frac{8}{5} - \frac{\frac{8}{5}-2}{\frac{14}{25}-2}\cdot\frac{14}{25} = \frac{8}{5} - \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{36}{25}}\cdot\frac{14}{25}$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{28}{5\cdot 36} = \dots = \frac{13}{9}$$

feil: $|\frac{13}{9} - \sqrt{2}| \approx 0.032$.

Litt større feil enn for Newton.