Forelesning 20/11

Kap. 10 i kompendiet om nullpunktsmetoder, avslutningsvis

Man kan vise at (med antakelser som ligner de for Newtons metode), feilen $e_k = x_k - x^*$ i sekantmetoden oppfyller $e_{k+1} \leq K e_k^p$, $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Dette betyr: $\approx 61\%$ flere riktige sifter per iterasjon.

(Dette er dårligere enn Newtons metode, som $\approx$ dobler antall riktige sifter per iterasjon).

Kap. 13 i kompendiet, avslutningsvis

Metoder for å løse $x'(t) = f(t,x)$, $x(a) = x_0$, numerisk

Eulers metode: $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$ $\quad h = \frac{b-a}{n}$, $t_k = a + kh$

$x_n \approx x(b)$

Eulers midtpunktsmetode:

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}})$$

$t_{k+\frac{1}{2}} = a + (k+\frac{1}{2})h$

Eksempel: $x'(t) = tx(t)$, $x(0) = 1 = x_0$

Bruk to steg med Euler / Euler midtpunkt for å finne en tilnærming til $x(1)$ $\quad (\Rightarrow h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2})$

Løsning: **Euler:**

$$x_1 = x_0 + \tfrac{1}{2} f(t_0, x_0)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$x_2 = x_1 + \tfrac{1}{2} f(t_1, x_1)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{4} = 1.25$$

Euler midtpunkt:

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \tfrac{1}{4} f(t_0, x_0)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{4} \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 = x_0 + \tfrac{1}{2} f(t_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{2}}) = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 1 = \frac{9}{8}$$

$$x_{\frac{3}{2}} = x_1 + \frac{1}{4} f(t_1, x_1)$$
$$= \frac{9}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{72+9}{64} = \frac{81}{64}$$
$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2} \cdot f(t_{3/2}, x_{3/2})$$
$$= \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{81}{64} = \frac{819}{512} \approx 1.5996$$

Analytisk løsning: Likningen er separabel:

$$x' = t \cdot x \iff \frac{x'}{x} = t \iff \ln|x| = \frac{1}{2}t^2 + C$$
$$|x(t)| = e^{\frac{1}{2}t^2 + C} \quad k = e^C, k > 0 \quad = k e^{\frac{1}{2}t^2}$$
$$x(t) = k' e^{\frac{1}{2}t^2}$$
$$x(0) = 1: \; 1 = k' \cdot e^0 \Rightarrow k' = 1$$

Derfor: $x(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$

$$x(1) = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$$

Ser at Eulers midtpunktsmetode gir best tilnærming:

Euler : $|1.6487 - 1.25| \approx 0.3987$

Euler midtpunkt : $|1.6487 - 1.5996| \approx 0.0491$

Hva blir feilen med Eulers metode?

Anta $x(t)$ løser $x' = f(t, x)$.

Førsteordens Taylor av $x(t)$, med restledd, om t_0, gir:

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{x''(c)}{2!}h^2, \text{ der } c \in [t_0, t_0 + h]$$

$x'(t_0) = f(t_0, x)$

kan regne videre på.

Dette gir:

$$\left| x(t_0 + h) - (x(t_0) + hf(t_0, x)) \right| = \left| \frac{x''(c)}{2!} h^2 \right|$$

eksakt verdi vi vil frem til.

ettsteg Euler, steglengde h

Så, feilen i Eulers metode, med ett steg når starter i $x(t_0)$, er $\approx h^2$. Man kan vise at feilen, når man tar n steg (for å gå fra a til b med steglengde h), er $\approx h$

Vi sier da at Eulers metode har orden 1 (global feil)

Man kan vise at Eulers midtpunktsmetoden har orden 2, dvs. feilen etter n steg (fra a til b) er $\propto h^2$.

13.5 i kompendiet: Systemer av førsteordens likninger

Vi har sett på:
1. annenordens likninger (med konstante koeffisienter)
2. numeriske metoder for å løse førsteordens likninger numerisk.

Annenordens likninger, kan skrives om til systemer av førsteordens likninger, og løse dem som slike med Eulers metode.

For $x'' = f(t, x, x')$ $\quad x(0) = a \quad x'(0) = b$:

Sett $y = x'$. Da får vi:

$y' = x''$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= f(t, x, y) \end{aligned} \qquad x(0) = a, \quad y(0) = b}$$

Eksempel: Vi ser på $x'' + \frac{\mu}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0$, (kloss med fjær m. friksjon

Dette blir (sett $y = x'$):

$$x' = y$$
$$y' = -\frac{\mu}{m} y - \frac{k}{m} x$$

Eulers metode kan også brukes på 1. ordens systemer:

Hvis $\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= f_1(t, x, y) \\ y'(t) &= f_2(t, x, y) \end{aligned}}$ tar Eulers metode formen

$$x_{k+1} = x_k + h f_1(t_k, x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + h f_2(t_k, x_k, y_k)$$

Dette kan også skrives:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + h \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t_k, x_k, y_k) \\ f_2(t_k, x_k, y_k) \end{bmatrix}}_{f(t_k, x_k, y_k)}$$

Eksamen 2022

Del 1

1 $y' + 5y = e^{3x}$ $\quad y(0) = \frac{1}{4}$

kar. likning: $r + 5 = 0 \Rightarrow r = -5 \Rightarrow y_h(x) = Ce^{-5x}$

part. løsning: prøv $y_p(x) = Ae^{3x}$ (siden 3 ikke rot i kar. likning)

$$\Downarrow$$

$$3Ae^{3x} + 5Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{8}e^{3x}$$

Gen. løsning: $y(x) = \frac{1}{8}e^{3x} + Ce^{-5x}$

$y(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + C \Rightarrow C = \frac{1}{8} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{8}(e^{3x} + e^{-5x})$

(E)

2. $f(x) = e^{2x} - 2$. Halveringsmetoden på $[a, b] = [0, 1]$, to iterasjoner

$a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $m_0 = \frac{1}{2}$

$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e^2 - 2 > 0$, $f(m_0) = e - 2 > 0 \Rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ velges i 1. it.

$a_1 = 0$ $\quad b_1 = \frac{1}{2}$ $\quad m_1 = \frac{1}{4}$

$f(0) < 0$ $\quad f(\frac{1}{2}) > 0$ $\quad f(\frac{1}{4}) = \sqrt{e} - 2 < 0 \Rightarrow [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ velges i 2. it.

metoden returner midtpunktet i det siste intervallet:

$$m_2 = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1 + 2}{8} = \frac{3}{8}$$

(E)

3. Taylorpolynomet til $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, om $a = 1$, grad 2.

ser at $f(1) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ $\quad f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$ $\quad f'(1) = 2 + 6 + 12 = 20$

$f''(x) = 6 + 24x$ $\quad f''(1) = 6 + 24 = 30$

$$T_2 f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= 10 + 20(x-1) + \frac{30}{2}(x-1)^2$$

$$= 10 + 20(x-1) + 15(x-1)^2$$

(D)

4. $p(x)$ grad ≤ 2 , $p(0)=1$, $p(2)=4$, $p(3)=1$

Sett $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-2)$

$1 = c_0 \quad \Rightarrow c_0 = 1$

$4 = c_0 + 2c_1 \quad \Rightarrow c_1 = (4-1)/2 = \frac{3}{2}$

$1 = c_0 + 3c_1 + 3c_2 \quad \Rightarrow c_2 = (1-1-\frac{9}{2})/3 = -\frac{3}{2}$

$p(x) = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x(x-2) = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 3x = 1 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}x^2$

$p'(1)$: $\quad p'(x) = \frac{9}{2} - 3x$

$p'(1) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$ (A)

5. Trapesmetoden på $\int_0^3 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f(x)}$, tre delintervaller $(h=1, \frac{h}{2}=\frac{1}{2})$

$I_{trap} = \frac{1}{2}(f(0) + f(3) + 2f(1) + 2f(2))$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{1+1} + \frac{2}{1+4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{10} + 1 + \frac{2}{5}\right)$

$= \frac{10+1+10+4}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$

(C)

6. Taylorpolynomet $T_3 f(x)$, $f(x) = e^{\sin x - x}$, om $a = 0$.

$f(0) = 1$, $\quad f'(x) = (\cos x - 1)e^{\sin x - x} \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = (-\sin x + (\cos x - 1)^2)e^{\sin x - x} \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = (-\cos x + 2(\cos x - 1)(-\sin x) + (\cos x - 1)(-\sin x + (\cos x - 1)^2))e^{\sin x - x}$

$f'''(0) = -1 e^0 = -1$

$T_3 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

$= 1 - \frac{1}{6}x^3$

(D)