UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger — del 1
Eksamensdag:	Tirsdag 7. desember 2004
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = e^x - 1 - x$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/6$ ☐ $x + x^2 + x^3/6$ ☐ $1 + x + x^2/2$
☐ $-1 - x^2/2$ ☐ $x^2/2 + x^3/6$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = x^2$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x + x^2$ ☐ x^2 ☐ x^3 ☐ $-x^2$ ☐ $1 + x/2 + x^2/3$

Oppgave 3. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = \sqrt{1 + x}$ om punktet $a = 0$ er

☐ 0 ☐ $-1/8$ ☐ $1/3$ ☐ $-1/2$ ☐ $1/12$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Vi tilnærmer en funksjon $f(x)$, som kan deriveres vilkårlig mange ganger, med et Taylorpolynom $T_n f(x)$ av grad n, utviklet om a. Vi betrakter restleddet

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

der ξ er et tall i intervallet $[a, x]$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ For alle f vil restleddet gå mot 0 når $n \to \infty$

☐ Ikke for noen f vil restleddet gå mot 0 når $n \to \infty$

☐ For alle f vil restleddet gå mot ∞ når $x \to -\infty$

☐ Restleddet vil gå mot 1 når $x \to \pi$

☐ For alle f vil restleddet gå mot 0 når $x \to a$

Oppgave 5. Vi har påstanden P: Det fins alltid nøyaktig ett polynom p_n av grad n som tilfredstiller betingelsene $p_n(x_i) = y_i$ for $i = 0, 1, \ldots, m$, der $(x_i)_{i=0}^m$ og $(y_i)_{i=0}^m$ er reelle tall slik at $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$. Påstanden P er sann hvis

☐ $m = n$ ☐ $m = 1$ ☐ $m < n$ ☐ $m = 0$ ☐ $m > n$

Oppgave 6. Anta at vi bruker trapesregelen til å beregne en tilnærming T til $\int_0^1 f(x)\,dx$, og at vi ser bort fra avrundingsfeil. Da er $T = \int_0^1 f(x)\,dx$ hvis

☐ f er en parabel ☐ $f(x) = \sin x$ ☐ $f(x) = e^x$

☐ f er en rett linje ☐ f er et polynom av grad tre

Oppgave 7. Hvilken av følgende differensialligninger er lineær?

☐ $y'' + \sin y = x$ ☐ $y' + x^2 y = 1$ ☐ $y' + y^2 = 0$

☐ $y'' + y' = \ln y$ ☐ $y' + 1/y = 2$

Oppgave 8. Differensialligningen $(1 + x^2)y' = y$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = Ce^{\text{ArcTan}\,x}$ ☐ $y(x) = Ce^{1+x^2}$ ☐ $y(x) = C/(1 + x^2)$

☐ $y(x) = C\sin(1 + x^2)$ ☐ $y(x) = \cos x$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 9. Differensialligningen $y'' - 4y' + y = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = e^{2x}(C\sin\sqrt{3}x + D\cos\sqrt{3}x)$ ☐ $y(x) = Ce^{2x} + De^{\sqrt{3}x}$

☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$ ☐ $y(x) = Ce^{(2-\sqrt{3})x} + De^{(2+\sqrt{3})x}$

☐ $y(x) = Ce^{(3+\sqrt{2})x} + De^{(3-\sqrt{2})}x$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Oppgave 10. Differensialligningen $y' + y/x = x^2$, der $x > 0$, har løsningen

☐ $y(x) = x^2 + C$ ☐ $y(x) = x^2 + C/x$ ☐ $y(x) = x^3 + C$

☐ $y(x) = x + C/x$ ☐ $y(x) = x^3/4 + C/x$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

(Fortsettes på side 3.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Merk også at oppgavene ikke bygger på hverandre. I oppgavene 1, 3 og 4 er det derfor mulig å løse deloppgave b selv om du ikke har løst deloppgave a.

Oppgave 1.

a) Løs differensialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

med intitalverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

b) Løs differensialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = -x$$

med intitialverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Oppgave 2. Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

for alle heltall $n \geq 0$ og alle relle tall $a \neq 1$.

Oppgave 3. Tom har et akvarium der vannet har blitt for hardt, dvs. at konsentrasjonen av salter er for stor. Denne konsentrasjonen måles i gram per liter, g/ℓ, og har kommet opp i $c_0 = 1.0\,g/\ell$. Av hensyn til sine kjære dyr og planter, kan ikke Tom bytte alt vannet på en gang, men må nøye seg med å bytte S liter en gang i uka. Dette gjør han ved å tappe S liter vann fra akvariet og deretter fylle på med S liter vann fra springen. Vi ser bort fra fordampning etc.

a) Forklar hvorfor konsentrasjonen av salter etter n uker, c_n, er styrt av *differenslikningen*

$$c_n = \left(1 - \frac{S}{V}\right) c_{n-1} + \frac{S}{V} K,$$

der K er konsentrasjonen av salt i vannet i springen og V er det totale vannvolumet i akvariet, målt i liter.

b) Vi setter nå

$$K = 0.1 g/\ell, \quad V = 100.0\ell, \quad S = 10.0\ell$$

i tillegg til $c_0 = 1.0 g/\ell$.

Løs differensligningen og finn et uttrykk for saltkonsentrasjonen etter n uker. Hvor mange uker går det før Tom får saltinnholdet ned til det halve av c_0, dvs. til $0.5 g/\ell$?

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4.

a) Finn parabelen p som interpolerer funksjonen f i punktene $x = 0$, $x = h$ og $x = 2h$ (parabelen tilfredstiller altså betingelsene $p(0) = f(0)$, $p(h) = f(h)$ og $p(2h) = f(2h)$).
Deriver p og utled tilnærmingen $\delta(f)$ til $f'(0)$ gitt ved

$$f'(0) \approx \delta(f) = \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h}.$$

b) Vis at feilen i denne tilnærmingen er gitt ved

$$\left|f'(0) - \delta(f)\right| \leq h^2 \max_{x\in[0,2h]} \left|f'''(x)\right|.$$

Hint: I denne oppgaven kan du bruke at feilleddet i Taylors formel kan skrives

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

der ξ er et tall i intervallet $[a, x]$.

Lykke til og god jul!