UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 5. desember 2011.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Løsningen til differensialligningen $y'' + 4y' - 5y = 0$ med initialverdier $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$ er

- ☐ $y(x) = e^{-x}$
- ☐ $y(x) = 3e^{3x} - 3e^{x}$
- ☐ $y(x) = e^{x} + xe^{x}$
- ☐ $y(x) = e^{x}$
- ☐ $y(x) = e^{-2x}$

Oppgave 2. Løsningen til differensialligningen $y'' - 4y' + 5y = 0$ med initialverdier $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$ er

- ☐ $y(x) = e^{2x}\cos x$
- ☐ $y(x) = e^{2x}(\cos x + \sin x)$
- ☐ $y(x) = e^{x}\cos 2x$
- ☐ $y(x) = e^{x}(\cos 2x + \sin 2x)$
- ☐ $y(x) = e^{2x}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Løsningen til differensialligningen $y' + y^2x^3 = 0$ med initialverdi $y(0) = 1$ er

- ☐ $y(x) = 1/(1 + x^4)$
- ☐ $y(x) = 3/(3 + x^2)$
- ☐ $y(x) = 2/(2 + x^2)$
- ☐ $y(x) = 4/(4 + x^4)$
- ☐ $y(x) = 4/(4 + x^3)$

Oppgave 4. Vi skal løse differensialligninger numerisk. For fire av disse ligningene kan vi få store problemer om vi velger uheldige startverdier for x og t. For hvilken ligning vil vi aldri kunne få store problemer?

- ☐ $x' = \arcsin(t + x)$
- ☐ $x' = \sin(x^2 + t)$
- ☐ $x' = x/(1 + t)$
- ☐ $x' = \sqrt{1 + x}$
- ☐ $x' = 1/(1 + x^3)$

Oppgave 5. Vi ser på tre numeriske metoder for å finne nullpunkter for funksjoner: halveringsmetoden, sekantmetoden og Newtons metode. Hvilke (n) av disse metodene vil alltid gi liten feil, uavhengig av antall iterasjoner, og for alle førstegradspolynom?

- ☐ Bare halveringsmetoden
- ☐ Bare sekantmetoden
- ☐ Bare Newtons metode
- ☐ Bare Newtons metode og halveringsmetoden
- ☐ Bare sekantmetoden og Newtons metode

Oppgave 6. En tekst er lagret i en fil med en standard koding, og et av tegnene er kodet med tre bytes. Hvilken koding er filen da kodet med?

- ☐ UTF-8
- ☐ UTF-16
- ☐ ISO Latin-1
- ☐ ASCII
- ☐ UTF-32

Oppgave 7. Du skal bruke halveringsmetoden til å finne nullpunktet til funksjonen $f(x) = x^2-2$ og begynner med intervallet $[0, 2]$. Hva er intervallet etter to steg?

- ☐ $[0, 0.5]$
- ☐ $[0.5, 1]$
- ☐ $[1, 1.5]$
- ☐ $[1.5, 2]$
- ☐ $[0, 1]$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi skal beregne en tilnærming til den andrederiverte $f''(0)$ til en funskjon $f(x)$ ved hjelp av tilnærmingen

$$f''(0) \approx \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}.$$

Hvis vi ser bort fra avrundingsfeil så fins det et naturlig tall d slik at denne tilnærmingen er eksakt for polynomer av grad d, men ikke grad $d+1$. Verdien av d er

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

Oppgave 9. Differensialligningen $x''' - t^2x' + 5t = 0$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2x_2 - 5t$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = t^2x_2 - 5t$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2x_1 - 5t$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_2' = t^2x_1 - 5t$
- ☐ $x_1' = x_3, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = t^2x_2 - 5t$

Oppgave 10. Hvilket av følgende utsagn om differensiallikninger er korrekt?

- ☐ Alle andreordens likninger har nøyaktig 2 løsninger
- ☐ En førsteordens differensiallikning har alltid en entydig løsning når verdien til den ukjente funksjonen er gitt i et punkt
- ☐ En lineær, andreordens likning med konstante koeffissienter har alltid en entydig løsning når verdien til den ukjente funksjonen og dens førstederiverte er gitt i ett punkt
- ☐ Eulers metode er eksakt når differensiallikningen er av første orden
- ☐ Vi kan alltid legge sammen to løsninger av en differensiallikning og få en ny løsning

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0$$

har løsningen

$$x_n = \frac{1}{4}(1 + 3^{-n+1} - 2n).$$

b) Anta at vi simulerer differensligningen i (a) på datamaskin med 64 bits flyttall. Hvordan vil den beregnende løsningen oppføre seg for store verdier av n?

Oppgave 2. La $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ betegne Fibonacci-følgen gitt ved differensligningen

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

La $y_n = x_{4n}$ betegne følgen som består av hvert fjerde ledd i Fibonacci-følgen. Vis ved induksjon at y_n inneholder 3 som faktor for alle $n \geq 1$.

Oppgave 3. Du skal kode teksten $\boldsymbol{x} = ABAAA$ med aritmetisk koding. Vis at vi kan organisere kodingen slik at den aritmetiske koden ligger i intervallet $I = [a, b) = [0.64, 0.72192)$.
Finn tallet på formen $j/2^k$, med minst mulig heltall k, som ligger i I, og bestem fra dette en koding av teksten $\boldsymbol{x}$. Hvor mange bits består koden av?

Oppgave 4. I denne oppgaven er det mulig å løse (c) selv om du ikke har svart på (b).
Vi har gitt differensialligningen

$$x' = t \sin x, \quad x(0) = 1.$$

a) Regn ut $x'(0)$, Taylorpolynomet av første grad $p_1(t)$ til løsningen i $a = 0$ og regn ut $p_1(0.1)$ som en tilnærming til $x(0.1)$.

b) Deriver begge sider av differensialligningen med hensyn på t, regn ut $x''(0)$ og finn det kvadratiske Taylor-polynomet p_2 til løsningen om $a = 0$. Bruk $p_2(0.1)$ som en annen tilnærming til $x(0.1)$.

c) Finn en øvre grense for den absolutte feilen i tilnærmingen i (a) (vi ser bort fra avrundingsfeil).

Lykke til!