UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 6. desember 2012.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Løsningen til differensialligningen $y'' + y' - 6y = 0$ med initialverdier $y(0) = 2$ og $y'(0) = -1$ er

- ☐ $y(x) = e^{2x}$
- ☐ $y(x) = 2e^{3x} - 3e^{x}$
- ☐ $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$
- ☐ $y(x) = e^{2x} + e^{-3x}$
- ☐ $y(x) = e^{-3x}$

Oppgave 2. Løsningen til differensialligningen $y'' + 2y' + 5y = 0$ med initialverdier $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$ er

- ☐ $y(x) = e^{-x}\cos(2x)$
- ☐ $y(x) = e^{2x}(\cos(2x) + \sin(2x))$
- ☐ $y(x) = 2e^{-x}\sin(2x)$
- ☐ $y(x) = e^{-2x}\sin(x)$
- ☐ $y(x) = e^{-x}\sin(2x)/2$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Løsningen til differensialligningen $y' = x^3 + x^3y^2$ med initialverdi $y(0) = 1$ er

- ☐ $y(x) = e^{x^3}$
- ☐ $y(x) = \tan\left(\frac{1}{4}x^4 + 2\right)$
- ☐ $y(x) = \tan\left(\frac{1}{4}\left(x^4 + \pi\right)\right)$
- ☐ $y(x) = \tan\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 1$
- ☐ $y(x) = e^{x^4/4}$

Oppgave 4. Vi vil løse differensialligningen $x' = tx$, $x(0) = 1$ numerisk. Bruker vi tre steg (med konstant steglengde) med Eulers metode for å finne en tilnærming til $x(1.5)$ får vi verdien

- ☐ $5/8$
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $5/4$
- ☐ $15/8$

Oppgave 5. Vi skal se på tilnærmingen til den deriverte gitt ved den symmetriske Newton-kvotienten

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

For $f(x) = x^3$ blir feilen i denne tilnærmingen nøyaktig lik (bortsett fra avrundingsfeil)

- ☐ $h^2/2$
- ☐ 0
- ☐ h^2
- ☐ h
- ☐ $h/2$

Oppgave 6. En tekst som inneholder 512 tegn er lagret i en fil med en standard koding ved hjelp av 1055 bytes. Hvilken koding er filen da kodet med?

- ☐ UTF-8
- ☐ UTF-16
- ☐ ISO Latin-1
- ☐ 8-bits ASCII
- ☐ UTF-32

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Du skal bruke aritmetisk koding på teksten $AABA$. Hvis du tilordner intervallet $[0, 0.75]$ til A, så vil den aritmetiske koden ligge i intervallet

- ☐ $[0.216, 0.36]$
- ☐ $[0.421875, 0.5625]$
- ☐ $[0.421875, 0.52734375]$
- ☐ $[0.52734375, 0.5625]$
- ☐ $[0, 0.31640625]$

Oppgave 8. Hvilken er følgende påstander om numerisk integrasjon er sann?

- ☐ Feilene i Simpons regel og trapesmetoden er begge begrenset av uttrykk som involvere den andrederiverte.
- ☐ Simpsons metode gir en god tilnærming for alle integrerbare funksjoner.
- ☐ Trapesmetoden gir riktig verdi for ethvert andregradspolynom.
- ☐ Trapesmetoden gir en bedre tilnærming enn midtpunktmetoden.
- ☐ Simpsons regel gir riktig verdi for ethvert andregradspolynom.

Oppgave 9. Differensialligningene

$$\begin{aligned} x'' - 2tx' + \sqrt{t}x + y &= 0 \\ y' + x &= t^3 \end{aligned}$$

skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

- ☐ $x_2' = x_1, \quad y_1' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad x_1' = x_1 + t^3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = 2tx_2 - \sqrt{x}x_1 - y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2tx_2 + \sqrt{t}x_1 + y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- ☐ $x_1' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad x_2' = x_1 \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$

Oppgave 10. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^4$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$, med et tredjegradspolynom $p_3(x)$. Vi har da at

- ☐ $p_3(x) = x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 16x(x-1) + 34x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x^3$
- ☐ $p_3(x) = 2x + 6x(x-1) + 8x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 5x(x-1) + 4x(x-1)(x-2)$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{10}{3}x_{n+1} + x_n = -1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{5}{6}$$

har løsningen $x_n = (3 + 3^{-n})/4$.

b) Anta at vi simulerer differensligningen i (a) på datamaskin med 64 bits flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen oppføre seg for store verdier av n?

Oppgave 2. Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{3}n^3 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2$$

for alle $n \geq 1$.

Oppgave 3. Vi har gitt funksjonen $f(x) = 1/(1+x)$. Finn Taylor-polynomet $T_n(x)$ av n'te grad for f om 0. Hvor stor må du velge n for at $T_n(x)$ skal gi en tilnærming til $f(x)$ med absolutt feil mindre enn 0.001 for alle x i intervallet $[0, 0.5]$?

Oppgave 4.

Vi har gitt differensialligningen

$$x' = x^2/(1+t), \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

a) Finn en formel for løsningen og skisser denne i et plott på intervallet $[0, 1]$.

b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = 0.25$ ved å ta ett steg med Eulers metode.

Et alternativ til Eulers metode for en generell ligning $x' = f(t, x)$ er gitt ved relasjonen som forbinder (t_k, x_k) med (t_{k+1}, x_{k+1}) ved hjelp av

$$x_{k+1} = x_k + hf\big(t_k + h/2, (x_k + x_{k+1})/2\big), \qquad t_{k+1} = t_k + h. \tag{2}$$

Forklar hvorfor metoden er rimelig.

c) Dersom vi bruker metoden gitt ved (2) for $k = 0$ på differensialligningen (1) får vi at x_1 må tilfredstille en andregradslinging. Vis at en av løsningene av denne ligningen er gitt ved

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4h - 3h^2}}{h}. \tag{3}$$

Ta ett steg av lengde $h = 0.25$ med metoden gitt ved (3). Blir tilnærmingen mer eller mindre nøyaktig enn tilnærmingen med Eulers metode?

Forklar hvordan denne metoden, for en generell ligning, erstatter numerisk løsning av en differensialligning med et annet numerisk problem.

Lykke til!