UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 6. desember 2013.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Løsningen til differensialligningen $y'' + 4y' - 5y = 0$ med initialverdier $y(0) = 4$ og $y'(0) = -2$ er

- ☐ $y(x) = e^{-5x} + 3e^{x}$
- ☐ $y(x) = 2e^{5x} + 2e^{x}$
- ☐ $y(x) = 2e^{-5x} + 2e^{x}$
- ☐ $y(x) = 5e^{x} - e^{-5x}$
- ☐ $y(x) = 4e^{x}$

Oppgave 2. Løsningen til differensialligningen $y'' - 4y' + 5y = 5$ med initialverdier $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$ er

- ☐ $y(x) = 5 - 5e^{2x}\cos x$
- ☐ $y(x) = e^{2x}(\cos x - e^{2x}\sin x)$
- ☐ $y(x) = 1 - e^{2x}(\cos x - 3\sin x)$
- ☐ $y(x) = 1 - e^{2x}(\cos x + \sin x)$
- ☐ $y(x) = e^{2x}\sin x$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Løsningen til differensialligningen $y' - 2xy = -x$ med initialverdi $y(0) = 1$ er

- □ $y(x) = e^{x^2}$
- □ $y(x) = 1 + xe^{x^2}$
- □ $y(x) = 2 - e^{x^2}$
- □ $y(x) = \left(1 + e^{x^2}\right)/2$
- □ $y(x) = e^{x}$

Oppgave 4. Vi vil løse ligningen $x^3 - 3 = 0$ numerisk. Bruker vi tre steg med Newtons metode med startverdi $x_0 = 1$ får vi tilnærmingen

- □ $x_3 \approx 1.65324$
- □ $x_3 \approx 1.44281$
- □ $x_3 \approx 1.05873$
- □ $x_3 \approx 1.30921$
- □ $x_3 \approx 1.19291$

Oppgave 5. Vi skal se på tilnærmingen til den andrederiverte gitt ved

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

For $f(x) = x^2$ blir feilen i denne tilnærmingen nøyaktig lik (bortsett fra avrundingsfeil)

- □ $h^2/2$
- □ 2
- □ 0
- □ h
- □ $h/2$

Oppgave 6. En tekst som inneholder 5000 tegn, inkludert særnorske tegn, er lagret i en fil med en standard koding ved hjelp av 5000 bytes. Hvilken koding er filen da kodet med?

- □ UTF-8
- □ UTF-16
- □ ISO Latin-1
- □ 7-bits ASCII
- □ UTF-32

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Du skal bruke aritmetisk koding på teksten AAB. Hvis du tilordner intervallet $[0, 2/3)$ til A, så vil den aritmetiske koden ligge i intervallet

- ☐ $[8/9, 1)$
- ☐ $[2/3, 8/9)$
- ☐ $[4/9, 2/3)$
- ☐ $[0, 8/27)$
- ☐ $[8/27, 4/9)$

Oppgave 8. Vi tilnærmer integralet $\int_0^h x\,dx$ med trapesmetoden med ett steg. Svaret blir da (vi ser bort fra avrundingsfeil)

- ☐ 0
- ☐ $h^2/2$
- ☐ h
- ☐ $h/2$
- ☐ 1

Oppgave 9. Differensialligningen

$$x''' - \sin x'' + (x')^2 + tx = t^2$$

skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 - tx_1 + x_2^2 + \sin x_3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 - tx_1 - x_2^2 - \sin x_3$
- ☐ $x_3' = x_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = t^2 - tx_1 - x_2^2 + \sin x_3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 - tx_1 - x_2^2 + \sin x_3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 + tx_1 - x_2^2 + \sin x_3$

Oppgave 10. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^3$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$, med et tredjegradspolynom $p_3(x)$. Vi har da at

- ☐ $p_3(x) = x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 16x(x-1) + 34x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x^3$
- ☐ $p_3(x) = 2x + 6x(x-1) + 8x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 5x(x-1) + 4x(x-1)(x-2)$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{x_n}{9} = 1, \quad x_0 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{3}$$

har løsningen $x_n = (9 - 11 \cdot 3^{-n})/4$.

b) Anta at vi simulerer differensligningen i (a) på datamaskin med 64 bits flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen oppføre seg for store verdier av n?

Oppgave 2. Vis den utvidede trekantulikheten

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

ved induksjon, der $n \geq 2$ er et heltall. Du kan ta den vanlige trekantulikheten $|a + b| \leq |a + b|$ for gitt.

Oppgave 3.

a) Lag et Huffman-tre for teksten $\boldsymbol{x}$ ='den deriverte' med sannsynlighetsfordeling bestemt av teksten.

b) Kod teksten i (a) med Huffman-koding og regn ut antall bits pr. tegn for koden. Hva er det minimale antall bits teksten kan kodes med?

Vi minner om at informasjonsentropien til et alfabet med sannsynligheter p_1, p_2, $\ldots$, p_n er gitt ved

$$H(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i) \log_2 p(\alpha_i).$$

Oppgave 4.
Vi har gitt differensialligningen

$$x' = e^{-x}, \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

a) Finn en formel for løsningen og skisser denne i et plott på intervallet $[0, 1]$.

b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = h$ ved å ta ett steg med Eulers metode. Finn en øvre grense for feilen i denne tilnærmingen.

Lykke til!