UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 2. Desember 2016.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = x^2$?

A: $1 + 2(x - 1)$

B: $1 + (x - 1)$

C: 1

D: $x - 1$

E: $1 + x^2$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = \ln x$?

A: $1 + (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

B: $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

C: $(x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

D: $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

E: $(x - 1) - (x - 1)^2 + 2(x - 1)^3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin(\sin x)$?

A: x.

B: $\cos(1)x$.

C: $\sin(1)x$.

D: 0.

E: $\sin(1)\cos(1)x$.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{2x}$

B: $y(x) = e^{2x} - xe^{2x}$

C: $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$

D: $y(x) = xe^{2x}$

E: $y(x) = 2e^{2x} - 2xe^{2x}$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $x^2 y' y^2 = 2x$ er

A: $y(x) = (6\ln x)^{1/3}$

B: $y(x) = \ln x$

C: $y(x) = (6\ln x)^{1/2}$

D: $y(x) = 3x^{1/3}$

E: $y(x) = (\ln x)^{1/3}$

Oppgave 6. Et tredjegradspolynom som interpolerer datasettet

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	0	2	1

er

A: $p_3(x) = 1 - x - \frac{2}{3}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

B: $p_3(x) = 1 + x + 2x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

C: $p_3(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

D: $p_3(x) = 1 + 2x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

E: $p_3(x) = 1 - x^2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Vi minner om at sekantmetoden finner tilnærminger til nullpunkter til f ved hjelp av formelen

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}).$$

Vi bruker sekantmetoden med startverdier $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ til å finne ett av nullpunktene til funksjonen $f(x) = x^2 - 2$. I første iterasjon får vi da at x_3 blir

A: $\sqrt{2}$

B: 1.9

C: 1.5

D: 4/3

E: 5/4

Oppgave 8. Vi bruker

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

for å regne ut tilnærminger til den andrederiverte. Tilnærmingen til den andrederiverte av $f(x) = x^3$ i $a = 1$ er da gitt ved

A: 6

B: $6 + h$

C: $6 - h$

D: $6 + h^2$

E: $6 - h^2$

Oppgave 9.
Vi minner om at trapesmetoden for integralet $I = \int_a^b f(x)\,dx$ med n delintervaller er gitt ved

$$I \approx h\big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\big), \quad h = (b-a)/n.$$

Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut

$$\int_0^2 x^2 dx$$

får vi tilnærmingen

A: 33/8

B: 3

C: 8/3

D: 7/3

E: 11/2

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. Differensialligningen $x'' + \sin(x^2 + x') = t$, med initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_2' = x_1, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

B: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t,\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$

C: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

D: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_2^2 + x_1) + t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

E: $x_1' = x_2, \quad x_2' = \sin(x_1^2 + x_2) - t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

(Fortsettes på side 5.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f(x) = xe^x$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = (x + k)e^x$ for alle $k \geq 0$.

b) Finn Taylor-polynomet $T_n(x)$ av grad n til f om $a = 0$ og restleddet $R_n(x)$. Finn en N slik at for alle $n \geq N$, og for alle x i intervallet $[0, 1]$, så vil feilen i $T_n(x)$ bli mindre enn 0.001.

Oppgave 2.
Vi har gitt differensligningen

$$12x_{n+2} - 7x_{n+1} + x_n = 6, \quad x_0 = 0, \; x_1 = 2/3.$$

a) Vis at den generelle løsningen av ligningen er

$$x_n = 1 + C4^{-n} + D3^{-n}$$

der C og D er vilkårlige konstanter. Vis også at løsningen som tilfredstiller startverdiene er $x_n = 1 - 3^{-n}$.

b) Anta at vi skal simulere ligningen på en datamaskin med 64-bits flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen oppføre seg for store verdier av n?

Oppgave 3. Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \sin(t + x), \quad x(0) = \pi/2.$$

a) Finn to tilnærmede løsninger til ligningen i $t = 0.1$ ved å ta et steg med Eulers metode og et steg med Eulers midtpunktmetode.

b) Finn et uttrykk for $x''(t)$ ved å derivere begge sider av differensialligningen og regn fra dette ut $x''(0)$. Bruk dette til å finne en tilnærming til løsningen i $t = 0.1$ ved hjelp av det kvadratiske Taylor-polynomet. Finn også en verdi for h som garanterer at feilen i Eulers metode er mindre enn 0.0001.

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Oppgave 4. Vi har datasettet

x	0	1	3
$f(x)$	1	0	2

Finn det kvadratiske interpolasjonspolynomet p som interpolerer disse verdiene og regn ut en tilnærming til den deriverte til f i $x = 1$ ved hjelp av tilnærmingen $f'(1) \approx p'(1)$.

Lykke til!