Underveiseksamen i MAT-INF 1100, 17. oktober 2003
Tid: 9.00–11.00

Kandidatnummer:

De 15 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 5 teller 4 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

1) Det binære tallet 1100101 er det samme som det desimale tallet

- ☐ 50
- ☐ 104
- ☑ 101
- ☐ 93
- ☐ 81

Løsningsskisse.

$$1100101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 101_{10}.$$

2) Skrevet i totallssystemet blir tallet 140

- ☐ 10110100
- ☐ -1010100
- ☑ 10001100
- ☐ 10110001
- ☐ 11001100

Løsningsskisse.

$$10001100_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 140_{10}.$$

3) Det reelle tallet $1/(1+\sqrt{2})$ er

- ☐ $1-\sqrt{2}$
- ☐ et rasjonalt tall
- ☐ et naturlig tall
- ☐ ikke definert

- [x] et irrasjonalt tall

Løsningsskisse. Faktakunnskap, se kapittel 2 i Kalkulus.

4) Det reelle tallet $\dfrac{4}{3\sqrt{5}-5} - \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ er

- [ ] et irrasjonalt tall
- [ ] et negativt tall
- [ ] 5
- [ ] 0
- [x] et rasjonalt tall

Løsningsskisse.

$$\frac{4}{3\sqrt{5}-5} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{\sqrt{5}(3\sqrt{5}-5)} = \frac{15-5\sqrt{5}}{15-5\sqrt{5}} = 1.$$

5) Den største nedre skranken til mengden $\{x : |2x+1| < 1\}$ er

- [ ] 0
- [ ] 2
- [ ] $\sqrt{2}$
- [x] -1
- [ ] -2

Løsningsskisse. Når $2x+1 > 0$(eller $x > -1/2$) sier ulikheten at $2x+1 < 1$ eller $x < 0$. Når $2x+1 \leq 0$ sier ulikheten at $-2x-1 < 1$ som betyr at $x > -1$. Mengden er altså intervallet $(-1, 0)$ som har største nedre skranke -1.

6) Den minste øvre skranken til mengden $\{x : x^2 - 2 < 2x\}$ er

- [ ] $\sqrt{3}$
- [ ] $1-\sqrt{3}$
- [ ] 2
- [x] $1+\sqrt{3}$
- [ ] 1

Løsningsskisse. Mengden er gitt ved ulikheten $x^2 - 2x - 2 < 0$. Det kvadratiske uttrykket på venstre side har røttene $1+\sqrt{3}$ og $1-\sqrt{3}$ og er en parabel som er åpen oppover. Dermed er det kvadratiske uttrykket negativt mellom disse verdiene slik at den minste øvre skranken blir $1+\sqrt{3}$.

7) Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a+1)^{31}$ der a er ulik 0, hva blir da koeffisienten foran a^{29}?

- [ ] 17
- [ ] 359
- [x] 465
- [ ] 431
- [ ] 546

Løsningsskisse. Koeffisienten er gitt ved

$$\binom{31}{29} = \frac{31!}{29!(31-29)!} = \frac{30 \cdot 31}{2} = 465.$$

8) Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for spesielle verdier av a og b når det regnes med flyttall, vi ser bort fra underflow og overflow, og a og b er slik at operasjonene gir mening?

- [x] $\sqrt{a-b}$
- [ ] a^2b
- [ ] $2a$
- [ ] a/b
- [ ] $\sqrt{ab}$

Løsningsskisse. Den store stygge ulven er kansellering som oppstår når vi subtraherer to nesten like tall og det kan skje i uttrykk 1.

9) Hvilket av følgende utsagn er sant?

- [ ] De naturlige tallene er ikke en delmengde av de rasjonale tallene
- [x] Når kvadratroten av et positivt heltall ikke er heltallig er den irrasjonal
- [ ] Avrundingsfeil skaper alltid problemer når vi arbeider med heltall
- [ ] Det er bare et endelig antall rasjonale tall
- [ ] Det er et uendelig antall 64-bits heltall

Løsningsskisse. Beklagelig feil i oppgaveteksten (som ble opplyst på eksamen og er rettet her). Forøvrig faktakunnskap se kapittel 2 i Kalkulus.

10) Funksjonen f er definert på intervallet $I = [a, b]$, er kontinuerlig og tilfredstiller betingelsen $f(a) \cdot f(b) < 0$. Vi anvender halveringsmetoden for å finne en tilnærming til et nullpunkt i I, og etter 11 iterasjoner vet vi at den absolutte feilen ligger i intervallet $(0.0014, 0.0015)$. Intervallet I må da ha bredde $b - a$ lik

- [x] 3
- [ ] 1
- [ ] 2

- [ ] 0.5
- [ ] e

Løsningsskisse. Her var det også en feil i oppgaveteksten (ble opplyst på eksamen og er rettet her). Feilen må være mindre enn $(b-a)/2^{11}$. For at dette skal bli mindre enn 0.0015 må $b-a < 0.0015 \cdot 2^{11} = 3.072$ og for at det skal bli større enn 0.0014 må $b-a > 0.0014 \cdot 2^{11} = 2.8672$. Det eneste alternativet som passer med dette er $b-a=3$.

11) Hvilken av følgende differensligninger er lineær?

- [ ] $x_n - \log(x_{n-1}) + x_{n-2} = 0$
- [ ] $e^{\sin x_n} + x_{n-1} = 0$
- [ ] $x_n^2 + x_{n-2} = 0$
- [x] $x_n + n^{1/2}\, x_{n-1} + x_{n-2} = 0$
- [ ] $\sqrt{x_n} - x_{n-1} = 0$

Løsningsskisse. En differensligning er lineær hvis ligningen kun inneholder en sum av ledd der eneste operasjon som involverer den ukjente følgen er multiplikasjon med tall som ikke involverer den ukjente følgen. Dette gjelder kun for 4. alternativ.

12) Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = -3$$

er gitt ved

- [ ] $x_n = (1-4^n)/2$
- [x] $x_n = (-1)^n - 2^n$
- [ ] $x_n = -3n$
- [ ] $x_n = n - 1 - 3^n$
- [ ] $x_n = -(n-1)^2 - 2^n$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen er $r^2 - r - 2$ som har røtter $r_1 = -1$ og $r_2 = 2$. Den generelle løsningen er derfor $x_n = C(-1)^n + D2^n$. Startverdiene gir $0 = x_0 = C + D$ og $-3 = x_1 = -C + 2D$ som gir $D = -1$ og $C = 1$ så $x_n = (-1)^n - 2^n$.

13) En differensligning har karakterstisk ligning med røtter $r_1 = 3 + 2i$ og $r_2 = 3 - 2i$. Differensligningen er da gitt ved

- [ ] $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = 0$
- [x] $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 13x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - 8x_{n+1} + x_n = 0$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen er

$$\big(r-(3+2i)\big)\big(r-(3-2i)\big) = r^2-(3+2i+3-2i)r+9-4i^2 = r^2-6r+13=0.$$

Altså er differensligningen gitt ved alternativ 4.

14) Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2}+2x_{n+1}+4x_n=0, \qquad x_0=0, \quad x_1=\sqrt{3}$$

er gitt ved

- ☐ $x_n = 4^n - 1$
- ☐ $x_n = 2^n \cos(2n\pi/3)$
- ☑ $x_n = 2^n \sin(2n\pi/3)$
- ☐ $x_n = n\sqrt{3}$
- ☐ $x_n = 2^n \sin(n\pi/3)$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen er gitt ved $r^2+2r+4=0$ som har to kompleks konjugerte røtter r og $\bar{r}$ gitt ved $r=-1+i\sqrt{3}$. Dette tallet ligger i andre kvadrant, har modulus $|r|=\sqrt{1+3}=2$ og argument $\theta=\arccos(-1/2)=2\pi/3$. Med andre ord er $r=2e^{i2\pi/3}$ så den generelle løsningen er $x_n = 2^n\big(C\cos(2n\pi/3)+D\sin(2n\pi/3)\big)$. Startverdiene gir da $0=x_0=C$ og $\sqrt{3}=x_1=2D\sqrt{3}/2$ så $C=0$ og $D=1$. Løsningen er dermed $x_n=2^n\sin(2\pi/3)$.

15) Numerisk simulering av differensligningen $x_{n+2}-\dfrac{7}{3}x_{n+1}+\dfrac{2}{3}x_n=0$ med 64-bits flyttall og startverdier $x_0=1$ og $x_1=1/3$ vil gi

- ☑ store problemer med avrundingsfeil
- ☐ ingen problemer med avrundingsfeil
- ☐ $x_n=(n+1)^2/3$
- ☐ $x_n=0$
- ☐ $x_n=\texttt{NaN}$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen $r^2-7r/2+2/3=0$ har røtter $r_1=1/3$ og $r_2=2$ som gir den generelle løsningen $x_n=C/3^n+D2^n$. Startverdiene $x_0=1$ og $x_1=1/3$ gir $1=x_0=C+D$ og $1/3=x_1=C/3+2D$ som har løsningen $D=0$ og $C=1$. Den eksakte løsningen er derfor $x_n=1/3^n$. Men på grunn av avrundingsfeil (koeffisienten $2/3$ og startverdien $1/3$ kan ikke representeres eksakt) vil følgen vi simulerer være på formen $x_n=(1+\epsilon_1)/3^n+\epsilon_2 2^n$ der ϵ_1 og ϵ_2 er små tall. For store verdier av n vil derfor leddet $\epsilon_2 2^n$ (som kun kommer av avrundingsfeil) dominere og ødelegge våre simulerte verdier.

16) Vi lar P_n betegne påstanden at formelen

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = (n-1)^2+1$$

er sann for $n\geq 1$. Et induksjonsbevis for dette kan være som følger:

1. Når $n=1$ er både høyre og venstre side lik 1, så formelen stemmer i dette tilfellet.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sann, for å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden P_k er sann har vi

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2k + 1 = (k-1)^2 + 1 + 2k + 1$$
$$= k^2 - 2k - 1 + 1 + 2k + 1 = k^2 + 1.$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann og dermed er P_n sann for alle $n \geq 1$.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- ☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☑ Påstanden P_n er feil, og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden P_n er feil, og både del 1 og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- ☐ Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Løsningsskisse. Det er lett å sjekke at formelen ikke stemmer. For eksempel er venstre siden lik 3 for $n = 2$ mens høyre siden da er 2. Altså må det være en feil i beviset et sted. Del 1 er åpenbart riktig så feilen er i del 2 ($(k-1)^2$ er ikke lik $k^2 - 2k - 1$, men $k^2 - 2k + 1$).

17) La f_n betegne Fibonaccifølgen definert ved

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geq 0, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1. \tag{1}$$

I denne oppgaven skal vi finne en formel for løsningen av differensligningen

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2}, \qquad n \geq 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2.$$

Vi har tro på at følgende påstand er sann:

P_n: For alle heltall $n \geq 0$ gjelder det at $x_n = 2^{f_n}$, der f_n er Fibonacci-følgen gitt ved (1) over.

Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. Vi ser med en gang at $x_0 = 1 = 2^0 = 2^{f_0}$ og $x_1 = 2 = 2^1 = 2^{f_1}$ så P_0 og P_1 er begge sanne.
2. Anta at vi har vist at P_n er sann for $n = 0, \ldots, k$, vi må vise at da er også P_{k+1} sann. Vi har
$$x_{k+1} = x_k \cdot x_{k-1} = 2^{f_k} 2^{f_{k-1}} = 2^{f_k + f_{k-1}} = 2^{f_{k+1}}$$
der den siste likheten følger fra (1). Fra dette følger det at P_n må være sann for alle $n \geq 0$.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- ☐ Påstanden P_n er sann, men del 1 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

- [ ] Påstanden P_n er feil, men del 2 av induksjonsbeviset er riktig
- [x] Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- [ ] Påstanden P_n er feil, men del 1 av induksjonsbeviset er riktig

Løsningsskisse. Her skal alt være riktig.

18) Løsningen av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n$$

der $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$ er

- [ ] $x_n = 2^n - n$
- [ ] $x_n = 2^n - n\,(-3)^n$
- [ ] $x_n = (n^2 + n)/2$
- [ ] $x_n = n + 2 - 2^n$
- [x] $x_n = 3^n - n2^n$

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen har en dobbel rot i $r = 2$ så den generelle løsningen av den homogene ligningen er $x_n^h = (C + nD)2^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi med $x_n^p = A3^n$. Det gir $A(3^{n+2} - 4 \cdot 3^{n+1} + 4 \cdot 3^n) = 3^n$ eller $A\,3^n = 3^n$ som gir $A = 1$. Den generelle løsningen av ligningen er dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = (C + nD)2^n + 3^n.$$

Vi tilpasser så konstantene til startverdiene og får $1 = x_0 = C + 1$ og $1 = x_1 = 2(C + D) + 3$ som gir $C = 0$ og $D = -1$. Løsningen er dermed $x_n = 3^n - n2^n$.

19) Løsningen av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = n^2$$

der $x_0 = 0$ er gitt ved

- [ ] $x_n = n$
- [ ] $x_n = n^2$
- [x] $x_n = 3(2^n - 1) - 2n - n^2$
- [ ] $x_n = 2^n - 1$
- [ ] $x_n = 2^n - n^2 - 1$

Løsningsskisse. Dette er en første ordens ligning og den homogene ligningen $x_{n+1} - 2x_n = 0$ har løsningen $x_n = C2^n$. Vi prøver med en partikulær løsning på formen $x_n^p = A_1 + A_2 n + A_3 n^2$. Innsatt i ligningen gir det

$$A_1 + A_2(n+1) + A_3(n+1)^2 - 2(A_1 + A_2 n + A_3 n^2) = -A_1 + A_2 + A_3 + (-A_2 + 2A_3)n - A_3 n^2 = n^2.$$

Skal dette holde for alle n må vi ha $-A_3 = 1$, $-A_2 + 2A_3 = 0$ og $-A_1 + A_2 + A_3 = 0$. Dette gir $A_3 = -1$, $A_2 = -2$ og $A_1 = -3$. Dermed er en partikulær løsning $x_n = -3 - 2n - n^2$. Den generelle løsningen er derfor

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C2^n - (3 + 2n + n^2).$$

Startbetingelsen gir $0 = x_0 = C - 3$ så $C = 3$, altså er den totale løsningen gitt ved alternativ 3.

20) Vi bruker Newtons metode $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ på funksjonen $f(x) = x^2 - A$ der A er et positivt, reelt tall. Hvis vi betegner feilen med $e_n = x_n - \sqrt{A}$ så har vi

☐ $e_{n+1} = \dfrac{e_n}{2x_n}$

☑ $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2x_n}$

☐ $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{x_n^2}$

☐ $e_{n+1} = \dfrac{e_n e_{n-1}}{x_n}$

☐ $e_{n+1} = \log e_n$

Løsningsskisse. Vi har

$$\begin{aligned} e_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{A} = x_n - \sqrt{A} - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} &= \frac{2x_n^2 - 2x_n\sqrt{A} - x_n^2 + A}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{A} + A}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{A})^2}{2x_n} = \frac{e_n^2}{2x_n} \end{aligned}$$

så alternativ 2 er riktig.

Det var det!!