UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger
Eksamensdag:	15. oktober 2004
Tid for eksamen:	11:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Løsningsforslag

1) Det binære tallet 10111101 er det samme som det desimale tallet

- ☐ 205
- ☑ 189
- ☐ 301
- ☐ 156
- ☐ 123

Løsningsskisse.
$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^7 = 1 + 4 + 8 + 16 + 32 + 128 = 189.$

2) Skrevet i totallssystemet blir det desimale tallet 123

- ☐ 1100110
- ☐ 100011
- ☑ 1111011
- ☐ 1100101
- ☐ 1010110

Løsningsskisse. Vi bruker konverteringsalgoritmen fra desimal form til binær form (dividerer med 2 og tar vare på resten):

(Fortsettes på side 2.)

$$\begin{array}{r|l} 123 & 1 \\ 61 & 1 \\ 30 & 0 \\ 15 & 1 \\ 7 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$$

3) Desimaltallet 0.6 kan skrives på binær form som

- ☐ 0.100110011
- ☐ 0.10010101
- ☐ 0.111011
- ☐ kan ikke skrives som et binært tall
- ☑ krever uendelig mange binære siffer

Løsningsskisse. Siden $0.6 = 6/10$ er en brøk der nevneren ikke er en potens av 2 trenger vi uendelig mange binære siffer.

4) Det reelle tallet $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{7}$ er

- ☐ et irrasjonalt tall
- ☐ uendelig
- ☐ -1
- ☐ 1/3
- ☑ et rasjonalt tall

Løsningsskisse.

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{7} = \frac{3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{7} = \frac{3+\sqrt{2}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7} = \frac{3}{7}.$$

5) Den minste øvre skranken x til en vilkårlig, begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ tilfredstiller

- ☐ $x \in A$
- ☐ $x > a$ for alle $a \in A$
- ☑ $x \geq a$ for alle $a \in A$
- ☐ $x \in \mathbb{N}$
- ☐ $x \leq a$ for alle $a \in A$

6) Den minste øvre skranken til mengden $\{x < 2 \mid \sin x \geq 1\}$ er

- ☑ $\pi/2$

(Fortsettes på side 3.)

- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 0
- [ ] $\sqrt{2}$

Løsningsskisse. Denne mengden består av alle tall $x < 2$ slik at $\sin x = 1$, altså mengden $\{k\pi/2\}$ for $k = 1$, 0 ,-1, -2, ... Denne mengden har et største element som er $\pi/2$ og dette er dermed også minste øvre skranke.

7) En følge er definert ved $x_n = 2 + 1/n^2$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre og minste øvre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

- [ ] 0 og 2
- [ ] 2 og ∞
- [ ] 0 og ∞
- [x] 2 og 3
- [ ] 0 og n

Løsningsskisse. Vi ser at det største elementet i denne mengden er $x_1 = 3$ så 3 er minste øvre skranke. På den annen side er $x_n > 2$ for alle n, men x_n kommer vilkårlig nær 2 bare n er stor nok. Største nedre skranke må derfor være 2.

8) Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a + 1)^{4361}$, hva blir da koeffisienten foran a^{4360}?

- [ ] 4360
- [ ] 1
- [x] 4361
- [ ] 8720
- [ ] 2180

Løsningsskisse. Koeffisienten kan uttrykkes ved hjelp av binomialkoeffisienter som

$$\binom{4361}{1} = \frac{4361!}{1!\,4360!}$$

som kan forkortes til 4361.

9) Hvilket av følgende utsagn er sant?

- [ ] `NaN` er et reelt tall
- [ ] ∞ er et reelt tall
- [ ] Det fins flere 32 bits flyttall enn 64 bits flyttall
- [ ] π kan representeres eksakt ved hjelp av 64 bits flyttall
- [x] Ethvert reelt tall kan tilnærmes vilkårlig godt med rasjonale tall

(Fortsettes på side 4.)

10) Hvilket av følgende utsagn er sant?

- [ ] Alle ligninger har løsninger som bare kan uttrykkes ved hjelp av rottegn
- [ ] Halveringsmetoden konvergerer vanligvis raskere enn Newtons metode
- [x] For ethvert reelt tall a fins det en andregradsligning som har a som rot
- [ ] Et polynom av grad n har alltid n reelle nullpunkter
- [ ] I andregradsligninger er alltid et nullpunkt større enn det andre

Løsningsskisse. For eksempel ligningen $(x-a)^2 = 0$.

11) Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for spesielle verdier av a, b og c når det regnes med flyttall, vi ser bort fra underflow og overflow, og a, b og c er slik at operasjonene gir mening?

- [x] $a(b+c)$
- [ ] abc
- [ ] a/b
- [ ] $a/(bc)$
- [ ] $\sin(abc)$

Løsningsskisse. I det første alternativet kan vi få kansellering om b og c er nesten like i tallverdi, men har motsatt fortegn.
I ettertid så er det også klart at det er mulig å få stor avrundingsfeil i alternativ 5 om abc er nær $k\pi$ for $k \neq 0$. Dette alternativet ble bare kastet inn som fyllstoff uten nærmere ettertanke, men viser seg altså å være riktig! Om noen har krysset av for dette gir det selvsagt også 3 poeng. Takk til Rune Valle for å påpeke dette; du fortjener bonuspoeng, Rune!

12) En kontinuerlig funksjon f har et nullpunkt i intervallet $[0,1]$, og vi bruker halveringsmetoden for å finne en numerisk tilnærming til nullpunktet. Vi ønsker å bestemme nullpunktet med feil mindre enn 10^{-15}. Hvor mange halveringer må vi i så fall gjøre for å være sikre på at vi overholder dette kravet når vi ikke vet noe nærmere om hvor nullpunktet befinner seg?

- [x] 50
- [ ] 16
- [ ] 35
- [ ] 43
- [ ] 66

Løsningsskisse. Feilen etter n iterasjoner er begrenset av $(1-0)/2^n$. For at feilen skal bli mindre enn 10^{-15} kan vi derfor kreve

$$1/2^n < 10^{-15}$$

eller

$$n > 15\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 49.83.$$

(Fortsettes på side 5.)

Vi må derfor velge n minst lik 50.

13) Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og har konstante koeffisienter?

- [ ] $x_{n+1} + nx_n = 1$
- [x] $x_{n+2} - \frac{5}{11}x_{n+1} + x_n = \sin(2n)$
- [ ] $x_{n+2} - \frac{5}{11}x_{n+1} + x_n^2 = 0$
- [ ] $x_{n+2} - \log(x_{n+1}) + x_n = 2$
- [ ] $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$ der A er en konstant

14) Kun ett av de følgende ligningssett (differensligning + initialbetingelser) har en entydig bestemt løsning for x_n for $n = 1, \ldots, \infty$, hvilket ?

- [ ] $x_{n+1} + nx_n = 1$
- [ ] $x_{n+2} - x_n = n, \quad x_0 = 1$
- [x] $x_{n+2} - \frac{5}{11}x_{n+1} + x_n^2 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$
- [ ] $x_{n+3} + x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$
- [ ] $x_{n+1} = x_n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

Løsningsskisse. Det er kun andre alternativ som gjør det mulig å regne ut x_n for alle $n \geq 0$.
Siden oppgaveteksten har formuleringen "$n = 1, \ldots, \infty$", må også siste alternativ regnes som riktig (løsningen $x_n = 2$ for $n \geq 1$).

15) Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{3}{2}.$$

Hva er løsningen?

Løsningsskisse. Det karakteristiske polynomet er $2r^2 - 5r + 3 = 0$ som har har røttene $r_1 = 1$ og $r_2 = 3/2$. Den generelle løsningen er dermed

$$x_n = A + B\Big(\frac{3}{2}\Big)^n.$$

Startverdiene gir betingelsene $1 = x_0 = A + B$ og $3/2 = x_1 = A + 3B/2$ som har løsningen $A = 0$ og $B = 3/2$. Den generelle løsningen er derfor $x_n = (3/2)^n$.

- [ ] $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}2^n$
- [ ] $x_n = 2 - (\frac{3}{2})^n$
- [x] $x_n = (\frac{3}{2})^n$
- [ ] $x_n = 2^n - \frac{3}{2}$
- [ ] $A\sin(n)$ der A er en vilkårlig konstant

(Fortsettes på side 6.)

16) Vi har ligningsettet

$$x_{n+1} = r_n x_n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = a,$$

der r_n er en gitt sekvens av reelle tall og a er et reelt tall. Hva er løsningen?

- ☐ $x_n = an!$
- ☐ $x_n = ar^n$
- ☐ $x_n = ar_n$
- ☐ Det finnes ingen løsning
- ☑ $x_n = a \prod_{j=0}^{n-1} r_j$

Løsningsskisse. Ved ser at $x_1 = r_1 a$ og $x_2 = r_2 x_1 = r_2 r_1 a$ som kun stemmer med siste alternativ. Formelt sett trenger vi et lite induksjonsbevis for å vise at alternativ 5 er riktig.

17) Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = n.$$

Hvilken av følgende er en partikulærløsning ?

- ☐ $x = n^2$
- ☐ $n!$
- ☑ $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
- ☐ $An + B$ der A og B er konstanter
- ☐ 2^n

Løsningsskisse. Løsningen $x_n = An + B$ passer ikke i ligningen så vi må gå opp til andregrad og prøve med $x_n = An^2 + Bn + C$. Venstresiden blir da

$$\begin{aligned} &A(n+1)^2 + B(n+1) + C - An^2 - Bn - C \\ &\quad = An^2 + 2An + A + Bn + B + C - An^2 - Bn - C = 2An + A + B. \end{aligned}$$

For at dette skal bli lik n for alle n må vi ha $2A = 1$ og $A + B = 0$. Dette gir $A = 1/2$ og $B = -1/2$, så partikulærløsningen er

$$x_n = \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

18) Vi har skrevet et (korrekt) Javaprogram som simulerer differensligninger av første og andre orden ved hjelp av flyttall. For hvilket av problemene nedenfor får vi at den simulerte løsningen Java gir går mot null når $n \to \infty$?

- ☐ $x_{n+2} - \frac{10}{3}x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{2}{3}$
- ☐ $x_{n+1} = (2 + \frac{1}{n})x_n, \quad x_0 = 1$

(Fortsettes på side 7.)

☐ $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -1$

☑ $8x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 4$

☐ $x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = n, \quad x_0 = 0$

Løsningsskisse. Her var det trykkfeil i oppgaveteksten som ble opplyst på eksamen (= 0 manglet i 4. alternativ.)
Vi ser med en gang at løsningen av ligningen i alternativ 2 er positiv og tilfredstiller $x_{n+1} = (2 + 1/n)x_n > 2x_n$. Siden $x_1 = 1$ vil denne ikke kunne gå mot 0.
Det er også klart at løsningen i siste alternativ vil være positiv og $x_{n+1} = n + x_n/3 \geq n$, så denne vil også gå mot uendelig.
Den karakterstiske ligningen i alternativ 1 er $r^2 - 10r/3 + 1 = 0$ som har røttene $r_1 = 1/3$ og $r_2 = 3$. På grunn av avrundingsfeil vil løsningen 3^n alltid dominere slik at vi aldri kan få 0 som grenseverdi nå $n \to \infty$.
Karakteristisk ligning i alternativ 3 er $r^2 - r - 1 = 0$ som har røttene $r_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ og $r_2 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6$. Nok en gang er en av røttene større enn 1 så på grunn av avrundingsfeil vil alltid r_2^n dominere og vokse over alle grenser for store verdier n, så vi kan ikke nærme oss 0.
I alternativ 4 er den karakteristiske ligningen $8r^2 - 6r + 1 = 0$ som har røttene $r_1 = 1/2$ og $r_2 = 1/4$. Her er begge røttene mindre enn 1 i tallverdi. Siden alle løsninger er på formen $x_n = A/2^n + B/4^n$ vil de alle gå mot 0 når $n \to \infty$.

19) Vi har differensligningen med initialverdier gitt ved

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 18x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen ?

☐ $\left(3\sqrt{2}\right)^n[\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{4}} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{-in\pi}{4}}]$

☐ $\dfrac{5}{4}3^n - \dfrac{5}{4}2^n$

☐ $\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

☑ $\dfrac{1}{3}(3\sqrt{2})^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

☐ n

Løsningsskisse. Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 6r + 18 = 0$ som har røttene $r = 3(1 + i)$ og $\bar{r} = 3(1 - i)$. Dermed er $|r| = 3\sqrt{1 + 1} = 3\sqrt{2}$. Og siden real- og imaginærdelene er like, er argumentet til r lik $\pi/4$, slik at $r = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Dermed er den generelle løsningen

$$x_n = (3\sqrt{2})^n\bigl(A\sin(\pi/4) + B\cos(\pi/4)\bigr).$$

Startverdiene gir $0 = x_0 = B$ og $1 = x_1 = 3\sqrt{2}(A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2}) = 3A$ eller $A = 1/3$ og $B = 0$. Løsningen er altså

$$x_n = \frac{1}{3}(3\sqrt{2})^n \sin(\pi/4).$$

(Fortsettes på side 8.)

20) I denne oppgaven skal vi studere differensligningen

$$x_n = \frac{2}{x_{n-1}} + 1, \qquad n \geq 1$$

med startverdien $x_0 = 1$. Vår hypotese er at løsningen av differensligningen er gitt ved

$$x_n = \frac{6}{2 + (-1/2)^n} - 1. \tag{1}$$

La P_n for $n = 0, 1, 2, \ldots,$ betegne påstanden at formelen (1) er sann.

Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. Vi ser med en gang at $x_0 = \frac{6}{2+1} - 1 = 1$ så P_0 er sann.
2. Anta at vi har vist at P_n er sann for $n = 0, \ldots, k$, vi må vise at da er også P_{k+1} sann. Ved å utnytte at P_k er sann og ved manipulasjon av brøker får vi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{2}{x_k} + 1 = \frac{2}{\dfrac{6}{2 + (-1/2)^k} - 1} + 1 = \frac{2}{\dfrac{4 - (-1/2)^k}{2 + (-1/2)^k}} + 1 \\ &= \frac{2(2 + (-1/2)^k)}{4 - (-1/2)^k} + 2 - 1 = \frac{12}{2(2 - (1/2)(-1/2)^k)} - 1 \\ &= \frac{6}{2 + (-1/2)^{k+1}} - 1 \end{aligned}$$

som stemmer med formelen (1) for $n = k + 1$. Dermed ser vi at om P_k er sann er også P_{k+1} sann, så formelen (1) er riktig for alle $n \geq 0$.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

- ☐ Påstanden P_n er sann, men del 1 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden P_n er feil, men del 2 av induksjonsbeviset er riktig
- ☐ Påstanden P_n er feil, men del 1 av induksjonsbeviset er riktig
- ☑ Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige

Det var det!!