UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 13. oktober 2005.
Tid for eksamen:	9:00 – 11:00.

Oppgavesettet er på 8 sider.

Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 10100101 er det samme som det desimale tallet

- [ ] 205
- [ ] 143
- [ ] 301
- [x] 165
- [ ] 123

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det desimale tallet -151

- [ ] 1100110
- [ ] -100011
- [x] -10010111
- [ ] -1100101
- [ ] -1010110

Oppgave 3. Desimaltallet 7.25 kan skrives på binær form som

- [x] 111.01

(Fortsettes på side 2.)

- [ ] 111.1
- [ ] 1111.111
- [ ] kan ikke skrives som et binært tall
- [ ] krever uendelig mange binære siffer

Oppgave 4. Det reelle tallet $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}$ er

- [x] et irrasjonalt tall
- [ ] et imaginært tall
- [ ] 0
- [ ] $\sqrt{3}$
- [ ] et rasjonalt tall

Løsningsforslag. I det første leddet kan vi multiplisere med $3+\sqrt{3}$ over og under brøkstreken. Dette gir

$$\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{6} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

som vi vet er et irrasjonalt tall.

Oppgave 5. Den minste øvre skranken til mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ og } x^2 - 1 < 3\}$ er

- [ ] π
- [ ] -1
- [ ] 2
- [x] 0
- [ ] $\sqrt{2}$

Løsningsforslag. Den aktuelle mengden er intervallet $(-2, 0)$ og løsningen er dermed klar.

Oppgave 6. En følge er definert ved $x_n = n/(n+1)$ for $n \geq 1$. Hva er minste øvre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

- [x] 1
- [ ] Eksisterer ikke
- [ ] 0
- [ ] 1/2
- [ ] π

Løsningsforslag. Leddene i følgen ligger i intervallet $[1/2, 1)$ og kan komme vilkårlig nær 1. Dermed er svaret 1.

Oppgave 7. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a-1)^{50}$, hva blir da koeffisienten foran a^{48}?

- [x] 1225

(Fortsettes på side 3.)

- [ ] 1
- [ ] 50
- [ ] -50
- [ ] -2450

Løsningsforslag. Svaret er gitt ved formelen

$$(-1)^2 \binom{50}{2} = \frac{50!}{48!\,2!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225.$$

Oppgave 8. Hvilket av følgende utsagn er sant?

- [ ] Det fins et 32 bits flyttall som er nøyaktig lik e
- [ ] Det fins et 32 bits flyttall som er nøyaktig lik $1/3$
- [x] Det totale antall 64 bits flyttall er endelig
- [ ] Tallet 35 har flere desimale enn binære siffer
- [ ] De fleste irrasjonale tall kan representeres eksakt som 64 bits flyttall

Oppgave 9. Hva blir innholdet i variabelen `s` etter at kodebiten

```
int i, j, s = 0;
for (i=1; i<3; i++)
{
     j = i*i;
     s += j*j;
}
```

er utført?

- [ ] 5
- [ ] 0
- [ ] `Infinity`
- [ ] 98
- [x] 17

Løsningsforlag. Vi ser at `j*j` blir det sammen som `i*i*i*i`. Summen som akkumuleres er derfor $\sum_{i=1}^{2} i^4 = 17$.

Oppgave 10. Hva blir innholdet av variabelen `p` etter at kodebiten

```
int i, p = 1;
for (i=1; i<5; i++)
     p *= 1/i;
```

er utført?

- [ ] 4
- [ ] 1
- [ ] `NaN`
- [ ] 1/24

(Fortsettes på side 4.)

☑ 0

Løsningsforslag. Her forsøker vi å regne ut produktet $\prod_{i=1}^{4} 1/i$. Problemet er bare at vi akkumulerer produktet i `int`-variabelen `p` og at uttrykket `1/i` kun inneholder `int`-uttrykk. Dette betyr at `1/i` regnes ut som 1 for $i = 1$ og 0 ellers. Dermed blir `p` til slutt lik 0.

Oppgave 11. Verdien av funksjonen $f(x) = x^2 - 1$ skal beregnes ved hjelp av flyttall for $x = 0.9999$. Omtrent hvor mange desimale siffer vil du miste i beregningen?

☐ 2

☐ 10

☐ 8

☐ 6

☑ 4

Hint: Kondisjonstallet til f i a er gitt ved

$$\kappa(f;a) = \frac{|af'(a)|}{|f(a)|}.$$

bf Løsningsforslag. Kondisjonstallet til f utregnet i 0.9999 er

$$\kappa(f;0.9999) = \left|\frac{0.9999 \cdot 2 \cdot 0.9999}{0.9999^2 - 1}\right| \approx 9998.5 \approx 10^4.$$

Vi vet fra kapittel 6 i kompendiet at vi hvis kondisjonstallet er omtrent 10^n vil vi miste n siffer ved beregning av $f(a)$. I vårt tilfelle vil vi derfor miste 4 siffer.

Oppgave 12. Vi definerer oss en slektning av halveringsmetoden for å løse ligningen $f(x) = 0$ som vi kaller tredelsmetoden. I stedet for å dele intervallet i to deler hver gang, deler vi det her i tre like lange deler og velger det delintervallet der f har ulikt fortegn i endepunktene. Dersom dette inntreffer for flere delintervaller, velger vi det intervallet som ligger lengst til høyre på tallinjen. Vi starter med intervallet $[0, 1]$ og vet at f er kontinuerlig og har ett og bare ett nullpunkt i intervallet, men vi vet ikke hvor. Hvilket er det minste av de oppgitte antall iterasjoner vi må bruke for at vi kan være sikre på at tredelsmetoden gir en absolutt feil mindre enn 10^{-12}?

☐ 11

☐ 41

☐ 18

☑ 27

☐ 50

Løsningsforslag. Hvis vi lar $[a_n, b_n]$ betegne intervallet som inneholder nullpunktet etter n iterasjoner ser vi at

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{3} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{3^n} = 3^{-n}$$

(Fortsettes på side 5.)

siden $[a_0, b_0] = [0, 1]$. Feilen etter n iterasjoner er derfor maksimalt $3^{-n}/2$. Skal dette bli mindre enn 10^{-12} må vi ha

$$\frac{3^{-n}}{2} < 10^{-12}$$

eller

$$3^n > \frac{10^{12}}{2}.$$

Løser vi denne ulikheten med hensyn på n får vi

$$n > \frac{12 \ln 10 - \ln 2}{\ln 3} \approx 24.5.$$

Riktig svar er derfor 27.

Oppgave 13. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og har konstante koeffisienter?

- [ ] $x_{n+1} + x_n/n = 1$
- [ ] $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 1/x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - \sin(x_{n+1}) + x_n = -1$
- [x] $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n/3 = 2^n$
- [ ] $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$

Oppgave 14. Differensligningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = n^2$$

har en partikulærløsning på formen

- [ ] $x_n = A \sin n$
- [x] $x_n = An^2 + Bn + C$
- [ ] $x_n = A2^n + Bn2^n$
- [ ] $x_n = A/n + B$
- [ ] $x_n = An^2$

der A, B og C er vilkårlige reelle tall.
Løsningsforslag. En generell løsning på samme form som høyresiden er gitt i alternativ 2.

Oppgave 15. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$3x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 0, \quad x_0 = 7/6, \quad x_1 = 0.$$

Hva er løsningen?

- [ ] $x_n = 7(1 - n)/6$
- [ ] $x_n = 7/6$
- [x] $x_n = 3^{-n} + (-2)^n/6$
- [ ] $x_n = 7(2^n - n)/6$
- [ ] $x_n = A \sin n$ der A er en vilkårlig konstant

(Fortsettes på side 6.)

Løsningsforslag. Karakteristisk polynom er $3r^2 + 5r - 2 = 0$ som har løsningene $r_1 = -2$ og $r_2 = 1/3$. Den generelle løsningen er derfor

$$x_n = C_1(-2)^n + C_2 3^{-n}.$$

Startverdiene gir $7/6 = x_0 = C_1 + C_2$ og $0 = x_1 = -2C_1 + C_2/3$ som har løsningene $C_1 = 1/6$ og $C_2 = 1$.

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdi,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}, \quad n \geq 0, \quad x_0 = a$$

der a er et reelt tall. Hva er løsningen?

- [x] $x_n = a/n!$
- [ ] $x_n = an!$
- [ ] $x_n = a/n$
- [ ] Det finnes ingen løsning
- [ ] $x_n = a/n^2$

Løsningsforslag. Her er det enklest å regne ut de første verdiene og se systemet. Vi har $x_0 = a$, $x_1 = x_0/1 = a$, $x_2 = x_1/2 = a/2$, $x_3 = x_2/3 = x_2/(2 \cdot 3) = x_2/6$, $x_4 = x_3/4 = a/(2 \cdot 3 \cdot 4) = a/24$. Generelt ser vi at vi hver gang får inn en faktor $(n+1)$ i nevneren så løsningen blir $x_n = a/(n!)$. Et fullstending bevis vil være ved induksjon.

Oppgave 17. Differensligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = n - 1, \quad n \geq 1$$

med startverdi $x_1 = 1$ har løsningen

- [ ] $x_n = n$
- [ ] $x_n = n^2$
- [x] $x_n = 2^n - n$
- [ ] $x_n = 2^{n-1}$
- [ ] $x_n = 2^{n+1} - 1$

Løsningsforslag. Den homogene ligningen $x_{n+1} - 2x_n = 0$ har løsningen $x_n^h = C2^n$ der C er en vilkårlig konstant. For å finne en partikulær løsning prøver vi med en løsning på samme form som høyre siden $x_n^p = An + B$. Setter vi inn i ligningen får vi

$$A(n+1) + B - 2An - 2B = n - 1$$

eller $-An + A - B = n - 1$. Skal dette holde for alle $n \geq 1$ må $-A = 1$ og $A - B = -1$ altså $A = -1$ og $B = 0$. Den generelle løsningen er derfor

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C2^n - n.$$

Startverdien gir $1 = x_1 = 2C - 1$ så $C = 1$. Dermed er løsningen gitt ved alternativ 3.

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 18. Vi har skrevet et (korrekt) Javaprogram som simulerer differensligninger av første og andre orden ved hjelp av flyttall. For hvilket av problemene nedenfor får vi at den simulerte løsningen Java gir går mot null når $n \to \infty$?

- ☐ $x_{n+2} + \frac{15}{4}x_{n+1} - x_n = 0, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{1}{2}$
- ☑ $x_{n+2} + 5x_{n+1}/6 + x_n/6 = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 4$
- ☐ $x_{n+1} = 2x_n, \quad x_0 = 1$
- ☐ $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -1$
- ☐ $x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = n, \quad x_0 = 0$

Løsningsforslag. Det karakteristiske polynomet i alternativ 2 har røttene $-1/3$ og $1/2$. Enhver løsning vil derfor være på formen $x_n = C_1 3^{-n} + C_2 2^{-n}$ og vil derfor dø ut når n blir stor. Alle de andre ligningene har løsninger som av ulike årsaker vil vokse over alle grenser når vi regner med flyttall.

Oppgave 19. Vi har differensligningen med initialverdier gitt ved

$$x_{n+2} + 4x_n = 0, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

- ☐ $x_n = n2^n/2$
- ☐ $x_n = 2^{1/2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
- ☐ $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
- ☑ $x_n = 2^{n-1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
- ☐ $x_n = n$

Løsningsforslag. Det karaktertistiske polynomet $r^2 + 4 = 0$ har røttene $r_1 = -2i = 2e^{-i\pi/2}$ og $r_2 = 2i = 2e^{i\pi/2}$. Altså er den generelle løsningen

$$x_n = 2^n\big(C_1\cos(n\pi/2) + C_2\sin(n\pi/2)\big).$$

Startverdiene gir $0 = x_0 = C_1$ og $1 = x_1 = 2C_2$ slik at $C_2 = 1/2$. Dermed er alternativ 4 riktig.

Oppgave 20. Vi har gitt en påstand for $n = 1, 2, \ldots$

$$P_n : \quad |a_1 + \cdots + a_n| = |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

som skal gjelde når $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er vilkårlige reelle tall. Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. P_1 reduseres til $|a_1| = |a_1|$ som opplagt er sann.

2a. Gitt at $P_1, \ldots, P_n$ er sanne må vi nå vise at

$$P_{n+1} : \quad |a_1 + \cdots + a_{n+1}| = |a_1| + ... + |a_{n+1}|$$

er sann. For å gjøre dette definerer vi $b_1 = a_1 + \cdots + a_n$ og $b_2 = a_{n+1}$. Fra induksjonshypotesen følger det da at

$$|a_1 + \cdots + a_{n+1}| = |b_1 + b_2| = |b_1| + |b_2| \tag{1}$$

ved bruk av P_2.

(Fortsettes på side 8.)

2b. Fra P_n får vi videre at

$$|b_1| = |a_1 + \cdots + a_n| = |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

Setter vi dette inn i likning (1), får vi

$$|a_1 + \cdots + a_{n+1}| = |a_1| + \cdots + |a_{n+1}|$$

slik vi skulle og beviset er sluttført.

En av følgende påstander er sann, hvilken?

- [ ] Beviset er feil fordi nummereringen av a_n ikke er entydig
- [ ] Påstand og bevis er riktig
- [ ] Del 1 av beviset er feil
- [x] Det er en feil i del 2a av beviset
- [ ] Det er en feil i del 2b av beviset

Løsningsforslag. Det eneste stedet der det er en logisk brist er i punkt 2a der vi antar at P_2 er sann, men denne dominobrikken blir aldri 'felt' av beviset vårt. I dette induksjonsbeviset må altså P_2 sjekkes spesielt. Noen vil kanskje si at del 1 er feil, men det er ingen formell logisk feil i den delen.

Det var det!!