UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 12. oktober 2006.
Tid for eksamen:	9:00 – 11:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 1001110101 er det samme som det desimale tallet

- [ ] 831
- [ ] 451
- [x] 629
- [ ] 600
- [ ] 527

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det desimale tallet -481

- [x] -111100001
- [ ] -111110011
- [ ] -10010111
- [ ] -11100101
- [ ] -10101101

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Desimaltallet 1.2 kan skrives på binær form som

☐ 1.00110011

☐ 1.0011

☐ 1.01

☐ 1.001

☑ krever uendelig mange binære siffer

Oppgave 4. Det reelle tallet $\dfrac{(\sin(\pi/3)-1)^2+\sqrt{3}}{31}$ er

☐ et irrasjonalt tall

☐ et imaginært tall

☐ 0

☐ eksisterer ikke

☑ et rasjonalt tall

Løsningsforslag. Vi har at $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Dermed forenkles telleren i uttrykket til 7/4 slik at hele uttrykket blir 7/124 som er et rasjonalt tall.

Oppgave 5. En følge er definert ved $x_n = n^2$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

☑ 1

☐ er ikke definert

☐ 0

☐ 1/2

☐ ∞

Løsningsforslag. Den aktuelle mengden er $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ og løsningen er dermed klar.

Oppgave 6. Den minste øvre skranken til mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 4 < 6\}$ er

☐ π

☑ $2^{1/3}$

☐ 1

☐ 0

☐ $\sqrt{2}$

Løsningsforslag. Mengden kan også skrives som $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 2\}$. Ethvert tall større enn eller lik $2^{1/3}$ er en øvre grense for denne mengden, mens tall som er mindre enn $2^{1/3}$ ikke er det. Dermed er minste øvre grense $2^{1/3}$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(b+\sqrt{2})^{30}$, hva blir da koeffisienten foran b^{28}?

- [ ] 435
- [ ] 30
- [ ] 28
- [x] 870
- [ ] 1740

Løsningsforslag. Svaret er gitt ved formelen

$$(\sqrt{2})^2 \binom{30}{28} = 2\frac{30!}{28!\,2!} = 2\frac{30\cdot 29}{2} = 870.$$

Oppgave 8. Hvilket av følgende utsagn er sant?

- [ ] Bruk av heltall på datamaskin gir alltid avrundingsfeil
- [x] I Java fins det et tall av type `int` som er nøyaktig lik 4983874
- [ ] Det fins uendelig mange heltall med 10^{10} siffer
- [ ] Alle rasjonale tall kan skrives eksakt ved hjelp av en endelig binærsifferutvikling
- [ ] Hvis kvadratet av et irrasjonalt tall a er et heltall er a et partall

Oppgave 9. Hva blir innholdet i variabelen `s` etter at kodebiten

```
int i, j, s = 0;
for (i=1; i<3; i++)
{
     j = i*i;
     s += j/i;
}
```

er utført?

- [x] 3
- [ ] 0
- [ ] `Infinity`
- [ ] 5
- [ ] 1

Løsningsforlag. Vi ser at `j/i` blir det samme som `i`. Summen som akkumuleres er derfor $\sum_{i=1}^{2} i = 3$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. Hva blir innholdet av variabelen `p` etter at kodebiten

```
int i;
float j, p = 1;
for (i=0; i<5; i++)
{
     j = i;
     p *= (j*j)/j;
}
```

er utført?

- [ ] 1
- [x] `NaN`
- [ ] Programmet stopper
- [ ] 24
- [ ] 0

Løsningsforslag. Her forsøker vi å beregne produktet $\prod_{i=0}^{4} i * i/i$. Men i gjøres om til flyttall ved tilordningen $j = i$ og uttrykket $(j * j)/j$ gir da 0.0/0.0 med flyttall ved første gjennomløp i løkka. Dette gir `NaN`.

Oppgave 11. Verdien av funksjonen $f(x) = \ln x$ skal beregnes ved hjelp av `float`-variable for $x = 1.0001$. Omtrent hvor mange desimale siffer vil du miste i beregningen?

- [ ] Ingen
- [ ] 16
- [ ] 8
- [ ] 1
- [x] 4

Hint: Vi antar at feilen, δ, i x ved bruk av `float` er ca. 10^{-8}. Bruk den relative feilen definert som

$$\frac{\left|f(x+\delta) - f(x)\right|}{\left|f(x)\right|}.$$

Du kan eventuelt også gjøre bruk av kondisjonstallet til f som er gitt ved

$$\kappa(f;a) = \frac{\left|f'(a)a\right|}{|f(a)|}.$$

Løsningsforslag. Kondisjonstallet til f utregnet i $a = 1.0001$ er

$$\kappa(f;a) = \left|\frac{a \cdot \frac{1}{a}}{\ln a}\right| \approx 10000.5 \approx 10^4.$$

Vi vet fra kapittel 6 i kompendiet at hvis kondisjonstallet er omtrent 10^n vil vi miste n siffer ved beregning av $f(a)$. I vårt tilfelle vil vi derfor miste 4 siffer.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 12. Vi forsøker å finne nullpunktene til funksjonen $f(x) = (x-3)(x^2-3x+2)$ ved hjelp av halveringsmetoden. Vi starter med intervallet $[a, b] = [0, 3.5]$, utfører 1000 iterasjoner og lar x betegne det siste estimatet for nullpunktet. Hva blir resultatet?

- ☐ x nær $\sqrt{2}$
- ☐ Metoden konvergerer ikke
- ☐ x nær 2
- ☑ x nær 1
- ☐ x nær 3

Med nær mener vi her at forskjellen er mindre en 0.01.

Løsningsforslag. Vi løser ligningen $x^2 - 3x + 2 = 0$ og ser at denne har røttene 1 og 2. Dermed har f de tre røttene 1, 2 og 3. Vi ser også at $f(0) = -6$ og $f(3.5) = 1.875$, så forutsetningene for å bruke halveringmetoden er til stede. Ved første iterasjon med halveringsmetoden får vi som estimat for roten $x = 1.75$. Siden $f(1.75) = 0.234375$ vil halveringsmetoden arbeide videre med intervallet $[0, 1.75]$ der f har motsatt fortegn i endene. Men i dette intervallet har f bare ett nullpunkt, nemlig 1. Metoden vil garantert konvergere, og når vi nå har et intervall som bare inneholder ett nullpunkt vil den konvergere mot dette.

Oppgave 13. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og har konstante koeffisienter?

- ☐ $x_{n+1} + nx_n = 1$
- ☐ $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n^2 = 0$
- ☐ $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = -\sin(x_n)$
- ☑ $x_{n+2} + 4x_{n+1} + x_n = \sin(2^n)$
- ☐ $x_{n+1} = n^2 x_n$

Oppgave 14. Differensligningen

$$2x_{n+2} - x_n = n^2$$

har en partikulærløsning

- ☐ $x_n = n^2$
- ☐ $x_n = n^2 - 3n + 4$
- ☐ $x_n = -n^2$
- ☑ $x_n = n^2 - 8n + 24$
- ☐ $x_n = -n^2 - 4n + 12$

Løsningsforslag. Ut fra formen på høyresiden gjetter vi på en partikulærløsning på formen $x_n^p = an^2 + bn + c$. Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$n^2 = 2(a(n+2)^2 + b(n+2) + c) - an^2 - bn - c = an^2 + (8a+b)n + 8a + 4b + c.$$

Skal dette holde for alle verdier av n må vi $a = 1$, $8a+b = 0$ og $8a+4b+c = 0$ som gir $a = 1$, $b = -8$ og $c = 24$.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 15. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$2x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Hva er løsningen?

- [x] $x_n = 2^{-n/2}\big(\cos(3n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)\big)$
- [ ] $x_n = 3^{-n/2}\big(\cos(n\pi/2) + \sin(n\pi/2)\big)$
- [ ] $x_n = 3^{-n} + (-2)^n/6$
- [ ] $x_n = 2^{n/2}\big(\cos(3n\pi)\big)$
- [ ] $x_n = 2^{n/2}\big(\cos(3n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)\big)$

Løsningsforslag. Karakteristisk polynom er $2r^2 + 2r + 1 = 0$ som har løsningene $r = -(1-i)/2$ og $\bar{r} = -(1+i)/2$. Vi ser at r ligger i andre kvadrant og kan skrives som

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i3\pi/4} = 2^{-1/2} e^{i3\pi/4}.$$

Dermed er den generalle løsningen

$$x_n = 2^{-n/2}\big(C_1 \cos(3n\pi/4) + C_2 \sin(3n\pi/4)\big).$$

Startverdiene gir $1 = x_0 = C_1$ og $0 = x_1 = 2^{-1/2}(-C_1/\sqrt{2} + C_2/\sqrt{2})$ som har løsningene $C_1 = C_2 = 1$. Dermed er første alternativ riktig.

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdi,

$$x_{n+1} = (n+1)^2 x_n, \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

- [ ] $x_n = n!$
- [ ] $x_n = n$
- [ ] $x_n = n^2$
- [x] $x_n = (n!)^2$
- [ ] $x_n = \big((n-1)!\big)^2$

Løsningsforslag. Her er det enklest å regne ut de første verdiene og se systemet. Vi har $x_1 = 1$, $x_2 = 2^2 x_1 = 4$, $x_3 = 3^2 x_2 = (2 \cdot 3)^2$, $x_4 = 4^2 x_3 = (2 \cdot 3 \cdot 4)^2$. Generelt ser vi at vi hver gang får inn en faktor $(n+1)^2$ i steg $n+1$ så løsningen blir $x_n = (n!)^2$. Et fullstending bevis vil være ved induksjon.

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 17. Differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = 2^n, \quad n \geq 1$$

med startverdi $x_1 = 1$ har løsningen

- ☐ $x_n = n$
- ☐ $x_n = 3^{n-1}$
- ☐ $x_n = 2^{n-1}$
- ☑ $x_n = 3^n - 2^n$
- ☐ $x_n = (3^n + 2^n)/5$

Løsningsforslag. Den homogene ligningen $x_{n+1} - 3x_n = 0$ har løsningen $x_n^h = C3^n$ der C er en vilkårlig konstant. For å finne en partikulær løsning prøver vi med en løsning på samme form som høyre siden $x_n^p = A2^n$. Setter vi inn i ligningen får vi

$$A2^{n+1} - 3A2^n = 2^n$$

eller $2A - 3A = 1$ når vi forkorter bort 2^n. Dermed er $A = -1$. Den generelle løsningen er derfor

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C3^n - 2^n.$$

Startverdien gir $1 = x_1 = 3C - 2$ så $C = 1$. Dermed er løsningen gitt ved alternativ 4.

Oppgave 18. Vi har skrevet et (korrekt) Javaprogram som simulerer differensligninger av første og andre orden ved hjelp av flyttall. For hvilket av problemene nedenfor får vi at den simulerte løsningen Java gir går mot null når $n \to \infty$?

- ☐ $x_{n+1} = 5x_n/2, \quad x_0 = 1/5$
- ☑ $12x_{n+2} - 7x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2$
- ☐ $x_{n+1} - x_n = 1/(1 + n^2), \quad x_0 = 0$
- ☐ $6x_{n+2} - 35x_{n+1} - 6x_n = 0, \quad x_0 = 6, \quad x_1 = -1$
- ☐ $x_{n+2} - 16x_n = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -1$

Løsningsforslag. Det karakteristiske polynomet i alternativ 2 har røttene 1/4 og 1/3. Enhver løsning vil derfor være på formen $x_n = C_1 3^{-n} + C_2 2^{-n}$ og vil derfor dø ut når n blir stor. Alle de andre ligningene har løsninger som av ulike årsaker vil vokse over alle grenser når vi regner med flyttall. Dette er kanskje minst opplagt i alternativ 3. Denne ligningen kan skrives

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{1 + n^2}.$$

Altså vil x_{n+1} alltid bli større enn x_n og når vi starter med $x_0 = 0$ kan ikke x_{n+1} gå mot null.

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 19. En andreordens differensligning har den generelle løsningen

$$x_n = C_1 + C_2 8^n, \quad n \geq 0.$$

Hva er differensligningen?

- [x] $x_{n+2} - 9x_{n+1} + 8x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - 9x_{n+1} - 8x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} + 7x_{n+1} - 8x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} + 9x_{n+1} + 8x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 8x_n = 0$

Løsningsforslag. Fra formen på løsningen ser vi at den karakteristiske ligningen må ha røttene $r_1 = 1$ og $r_2 = 8$. Dermed er den karakteriske ligningen $(r-1)(r-8) = r^2 - 9r + 8 = 0$. Altså er differensligningen gitt ved alternativ 1.

Oppgave 20. Vi lar P_n betegne påstanden

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle heltall $n \geq 2$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_2 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_2, \ldots, P_k$ er sanne, for å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden P_k er sann har vi

$$\begin{aligned} 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1) + k + 1 = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 \\ &= \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \end{aligned}$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann.
Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [x] Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er feil, og både del 1 og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- [ ] Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Løsningsforslag. Her er P_2 ikke sann, så del 1 av beviset er feil og påstanden er feil.

Det var det!!