UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 11. oktober 2007.
Tid for eksamen:	9:00 – 11:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 1010101 er det samme som det desimale tallet

☐ 129 ☐ 15 ☐ 69 ☒ 85 ☐ 20201

Oppgave 2. I åttetallsystemet blir det desimale tallet 367

☐ 581 ☒ 557 ☐ 10010111 ☐ 11233 ☐ 4267

Oppgave 3. Desimaltallet 0.3 kan skrives på binær form som

☐ 0.1111

☐ 0.010011

☐ 0.10101

☐ 1.1

☒ krever uendelig mange binære siffer

Oppgave 4. Tallet $(1 - i\sqrt{3})^3$, der i er den imaginære enheten, er

☐ et irrasjonalt tall

☐ et rent imaginært tall

(Fortsettes på side 2.)

☐ et naturlig tall

☐ et komplekst tall der både real- og imaginærdel er ulik null.

☒ et rasjonalt tall.

Oppgave 5. En mengde er definert ved $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 5\}$. Hvilket utsagn er riktig?

☐ Største nedre skranke er $\sqrt{5}$.

☒ Mengden har ingen øvre skranke.

☐ Kompletthetsaksiomet gjelder ikke siden mengden bare består av hele tall.

☐ Største nedre skranke er 2.

☐ Mengden har verken øvre eller nedre skranker.

Oppgave 6. Vi multipliserer ut uttrykket $(2-b)^{16}$. Hva blir da koeffisienten foran b^{14}?

☐ -120 ☐ -16 ☒ 480 ☐ -480 ☐ 120

Oppgave 7. Et av de følgende utsagn er feil; hvilket?

☐ Alle heltall er elementer i $\mathbb{C}$.

☒ Vi kan alltid tilnærme et komplekst tall, vilkårlig godt, med rasjonale tall.

☐ De rasjonale tallene oppfyller alle 11 aksiomer for reelle tall, unntatt ett.

☐ $\sqrt{n}$, der n er et naturlig tall, er enten et naturlig tall eller et irrasjonalt tall.

☐ I numeriske beregninger på en datamaskin opererer vi bare med et endelig antall ulike tall.

Oppgave 8. Vi definerer tallmengden $A = \{x_n\}$, for $n \geq 0$, der x_n er gitt rekursivt ved $x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + x_n)$. Ett av følgende utsagn om A er sant

☐ $\sup A = 1$ ☒ $\inf A = 1$ ☐ $\sup A = \frac{3}{2}$ ☐ $\inf A = 0$

☐ A er ikke begrenset

kommentar: Vi finner svaret enklest ved å løse differenslikningen. Dette er rett fram og gir $x_n = 1 + 2^{-n}$ vi ser at x_n er avtagende og gå r mot 1 når $n \to \infty$. Dvs. at 1 er den største nedre grense.

Oppgave 9. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og homogen?

☐ $x_{n+1} + \log|x_n| = 0$

☐ $x_{n+2} - 9nx_{n+1} + x_n^2 - 2 = 0$

☐ $x_{n+2} - (n+1)x_{n+1} + nx_n - \sin(x_n) = 0$

☒ $x_{n+1} + (-1)^n x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 4(x_{n+1} + 1)x_n = 0$

Oppgave 10. Vi diskuterer metoder for å finne løsninger av likningen $f(x) = 0$, der f er en kontinuerlig funksjon, i intervallet $[a, b]$. Hvilket av de følgende utsagn er korrekt?

(Fortsettes på side 3.)

☐ Dersom $f(x)$ er et polynom av grad 4 eller høyere, finnes det bare numeriske løsninger.

☐ Halveringsmetoden gir en løsning bare dersom det bare er ett nullpunkt i $[a, b]$.

☐ Sekantmetoden kan bare brukes når $f(x)$ har ulikt fortegn i $x = a$ og $x = b$.

☒ Dersom den virker, konvergerer Newtons metode raskere enn halveringsmetoden.

☐ Newtons metode vil alltid konvergere når f er deriverbar overalt.

Oppgave 11. Taylorpolynomet $T_3 f(x)$, av grad 3 om punktet null, for funksjonen $f(x) = \sin x - \sin 2x$ blir?

☐ $x - \frac{2}{6}x^3$ ☒ $-x + \frac{7}{6}x^3$ ☐ $-x$ ☐ $-x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3$ ☐ $-x + \frac{8}{6}x^3$

Oppgave 12. Kondisjonstallet $\kappa(f; a) = \left|\frac{af'(a)}{f(a)}\right|$ beskriver relativ økning av feilen fra argumentet a til den beregnede funksjonsverdien $f(a)$. Vi skal beregne $f(x) = (x-10)^{10}$ for $x = 10.01$ i Python. Hvor mange desimale siffer mister vi i svaret i hht. kondisjonstallet?

☐ 10 ☐ 0 ☐ 2 ☒ 4 ☐ 8

Kommentar: innsetting i kondisjonstall gir for $a = 10.01$.

$$\left|\frac{af'(a)}{f(a)}\right| = \frac{10a(a-10)^9}{(a-10)^{10}} = 1.001 \cdot 10^4$$

Altså øker feilen med ca 10^4 og vi mister 4 desimale siffere.

Oppgave 13. Differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 2^n$$

har en partikulærløsning

☐ $x_n = n2^n$ ☒ $x_n = -n2^{n-2}$ ☐ $x_n = -n^2$ ☐ $x_n = 2^n$ ☐ $x_n = n^2 2^n$

Oppgave 14. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

☐ $x_n = 3^{-n}$

☐ $x_n = \sin(n\pi/2)$

☐ $x_n = -3^n + 2^{n+1}$

☒ $x_n = 3^n - 2^n$

☐ $x_n = 1$

Oppgave 15. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdi:

$$x_{n+1} = \sin(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1.$$

Hvilket av de følgende utsagn er sant?

(Fortsettes på side 4.)

☐ Likningen er ikkelineær og har ingen løsning

☐ $x_n = e^{\sin n}$

☐ $x_n = \sin^n 1$

☐ x_n vokser over alle grenser når n øker

☒ Mengden av elementene i følgen $\{x_n\}$ har en største nedre skranke

kommentar: Vi ser at $x_n > 0$ og vi bør vite at $\sin x < x$ for positive x. Det siste innebærer at $x_{n+1} < x_n$, dvs. at følgen $\{x_n\}$ er avtagende. Da må alle elementer ligge mellom 0 og 1 og mengden av elementene i følga er både oppad og nedad begrenset.

Oppgave 16. Differensligningen

$$x_{n+1} + 2x_n = 3n, \quad n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 0$ har løsningen

☐ $x_n = n$

☐ $x_n = \frac{2^n}{3} + n - \frac{1}{3}$

☒ $x_n = \frac{(-2)^n}{3} + n - \frac{1}{3}$

☐ $x_n = 2^n + n$

☐ $x_n = (3^n - 2^n) + n$

Oppgave 17. En lineær, homogen, andreordens differensligning med konstante koeffisienter, har den generelle løsningen

$$x_n = (C_1 + C_2 n)3^n, \quad n \geq 0.$$

Hva er differensligningen?

☐ $x_{n+2} - 9x_{n+1} + 8x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 9x_{n+1} - 8x_n = 0$

☒ $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$

☐ $x_{n+2} + 9x_{n+1} + 6x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = n$

Oppgave 18. $T_{11}f(x)$ for $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, om punktet null, er

☒ $\sum_{k=0}^{5} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \frac{x^k}{k}$

☐ $\sum_{i=1}^{6} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$

Merkand: Noen lurte på cosh. Dette er en vanlig betegnesle på “cosinus hyperbolicus”. Dette trengte en ike bry seg om under løsning av oppgaven.

Oppgave 19. Hvilken av følgende funksjoner har Taylorpolynomet $T_3 f(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ om $x = 0$?

☐ $x \cos x$ ☐ $1 + \sin x - \cos x$ ☒ $x + \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$ ☐ $\sin x$

☐ $\sin x + \frac{1}{2}x^2$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 20. For $f(x) = \frac{1}{1-x}$ har vi Taylorpolynomet $T_n f(x) = 1+x+x^2+..+x^n$ (skal ikke vises). Hva er den minste verdien av n fra lista under som gir $|f(\frac{1}{4})-T_n f(\frac{1}{4})| < 0.005$?

☐ 7 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 11 ☒ 4

Kommentar: Her er $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$. Feileddet på Lagrangesform blir da

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}},$$

For $x = \frac{1}{4}$ ligger c mellom 0 og $\frac{1}{4}$. Vi får da begrensninger på feilleddet

$$R_n f(\frac{1}{4}) > \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 4^{-(n+1)} \tag{1}$$

$$R_n f(\frac{1}{4}) < \frac{(\frac{1}{4})^{n+1}}{(\frac{3}{4})^{n+2}} = 4 \cdot 3^{-(n+2)} \tag{2}$$

Vi skal velge den minste n slik at feilen blir mindre enn $0.005 = \frac{1}{200}$. La oss regne ut for noen n

n	$4^{-(n+1)}$	$4 \cdot 3^{-(n+2)}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{27}$
2	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{81}$
3	$\frac{1}{256}$	$\frac{4}{243}$
4	$\frac{1}{1024}$	$\frac{4}{729}$

Vi kan med sikkerhet si at $n = 4$ gir liten nok feil, men det er mulig at også $n = 3$ er nok. Denne bruken Lagranges feilledd gir ikke et entydig svar. Akkurat her kan vi gjøre en bedre analyse ved hjelp av formelen for summen av en geometrisk rekke

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

der det aller siste leddet da er et eksakt mål for feilen. For $n = 3$ blir absoluttverdien av den

$$\frac{4^{-4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4^3 \cdot 3} = \frac{1}{192}$$

Altså er $n = 4$ rett svar.
Er man ikke i stand til å reprodusere formelen for geometrisk rekke kan man feks. gjøre følgende:
Fra Lagrangesfeileddene vet vi at Taylorpolynomet konverger mot $f(x)$ når $n \to \infty$ for $x = \frac{1}{4}$. Da kan vi sette $f(x)$ lik summen av rekka og trikse litt

$$\begin{aligned} f(x) = &\ 1 + x + x^2 + ... = 1 + x + ... + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} ... \\ = &\ 1 + x + ... + x^n + x^{n+1}(1 + x + x^2 + ...) \\ = &\ 1 + x + ... x^n + x^{n+1} f(x) \\ = &\ 1 + x + ... x^n + x^{n+1}/(1-x) \end{aligned}$$

Her har vi da egentlig utledet formelen for en geometrisk rekke. Dette var den vanskelige oppgaven i settet! *Det var det!!*