UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 10. oktober 2008.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 101101 er det samme som det desimale tallet

- [ ] 37
- [x] 45
- [ ] 36
- [ ] 43
- [ ] 49

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det heksadesimale tallet $3af_{16}$

- [ ] 1110111111
- [ ] 111010111
- [x] 1110101111
- [ ] 1100101111
- [ ] 1110101011

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Desimaltallet 1.625 kan skrives på binær form som

- [x] 1.101
- [ ] 1.0011
- [ ] 1.01
- [ ] 1.001
- [ ] krever uendelig mange binære siffer

Oppgave 4. På heksadesimal form blir det binære tallet 11.00111

- [ ] $c.11_{16}$
- [ ] $3.3e_{16}$
- [ ] 3.31_{16}
- [x] 3.38_{16}
- [ ] $c.f4_{16}$

Oppgave 5. Tallet

$$\frac{\ln \sqrt{e^\pi}}{\pi}$$

er

- [ ] et irrasjonalt tall
- [ ] et rent imaginært tall
- [ ] 0
- [ ] eksisterer ikke
- [x] et rasjonalt tall

Oppgave 6. En følge er definert ved $x_n = 1 + 1/n^2$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

- [ ] 1/2
- [ ] er ikke definert
- [ ] 0
- [x] 1
- [ ] ∞

Oppgave 7. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(1+x)^{100}$. Hva blir da koeffisienten foran x^{99}?

- [ ] 99
- [x] 100
- [ ] 445
- [ ] 101
- [ ] 1

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Hva er taylorpolynomet om $a = 0$ av grad 2 for funksjonen $f(x) = x^3$?

- [ ] x^3
- [ ] x^2
- [x] 0
- [ ] x
- [ ] $1 + 3x + 6x^2$

Oppgave 9. Hva er taylorpolynomet om $a = 1$ av grad 2 for funksjonen $f(x) = x^3$?

- [ ] x^3
- [ ] x^2
- [ ] 0
- [ ] $1 + 3x + 3x^2$
- [x] $1 - 3x + 3x^2$

Oppgave 10. Vi har funksjonen $f(x) = x^2$ og punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$. Da har den dividerte differansen $f[x_0, x_1, x_2]$ verdien

- [ ] 0
- [ ] 2
- [x] 1
- [ ] $1/2$
- [ ] -1

Oppgave 11. Taylorpolynomet av grad 3 om $a = 0$ til funksjonen $f(x) = \sin x + \cos x$ er

- [ ] $1 + x + x^2/2 + x^3/6$
- [x] $1 + x - x^2/2 - x^3/6$
- [ ] $1 - x + x^2/2 - x^3/6$
- [ ] $-1 - x + x^2 + x^3/6$
- [ ] $-1 + x - x^2/2 + x^3/6$

Oppgave 12. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^2$ med et polynom p_3 av grad 3, i punktene 0, 1, 2 og 3. Hva blir da $p_3(4)$, altså verdien av $p_3(x)$ i $x = 4$?

- [x] 16
- [ ] 0
- [ ] 8
- [ ] 4
- [ ] 2

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Anta at vi beregner Taylorpolynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \cos x$. Hva kan vi da si om feilleddet $R_n(x)$?

- [ ] Feilleddet vil for hver x bli større når n øker
- [x] For ethvert reelt tall x vil feilleddet gå mot 0 når n går mot ∞
- [ ] Feilleddet er 0 overalt
- [ ] Feilleddet vil gå mot 0 for alle x i intervallet $[-\pi, \pi]$, men ikke for andre verdier av x
- [ ] For alle n og alle reelle tall x vil absoluttverdien til feilleddet være mindre enn 1

Oppgave 14. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og har konstante koeffisienter?

- [ ] $x_{n+1} + x_n/n = 1$
- [ ] $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n^2 = 0$
- [x] $x_{n+2} - (\ln 2)x_{n+1} + x_n = -\cos(n)$
- [ ] $x_{n+2} + 4x_{n+1} + (-1)^n x_n = \sin(2^n)$
- [ ] $x_{n+1} = n^2 x_n$

Oppgave 15. Differensligningen

$$2x_{n+2} - 3x_n = 15 \cdot 2^n$$

har en partikulærløsning (med notasjonen $a \cdot b$ menes a multiplisert med b)

- [ ] $x_n = (3/2)^n$
- [ ] $x_n = 15 \cdot 2^n$
- [ ] $x_n = 5 \cdot 2^n$
- [ ] $x_n = 3^n$
- [x] $x_n = 3 \cdot 2^n$

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \sqrt{3}/2.$$

Hva er løsningen?

- [x] $x_n = \sin(2n\pi/3)$
- [ ] $x_n = \cos(2n\pi/3) + \sin(n\pi/3)$
- [ ] $x_n = 1 - (2 - \sqrt{3})\cos(n\pi/3)$
- [ ] $x_n = \sin(n\pi/3)$
- [ ] $x_n = -\sin(5n\pi/3)$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdi,

$$x_{n+1} = x_n/(2n), \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

- [x] $x_n = 1/((n-1)!\,2^{n-1})$
- [ ] $x_n = 1/n$
- [ ] $x_n = 1/(n!\,2^n)$
- [ ] $x_n = 1/(n!)^2$
- [ ] $x_n = 1/n^2$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - x_n/3 = 1 \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ nærme seg

- [ ] n
- [ ] 1
- [ ] 0
- [ ] $3^{1-n}/2$
- [x] 3/2

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$3x_{n+2} + 4x_{n+1} - 4x_n = 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 2/3$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall. For store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

- [ ] 0
- [ ] underflow
- [ ] 1
- [ ] $(2/3)^n$
- [x] overflow

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 20. Vi lar P_n betegne påstanden

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = n2^{n+1} - 2.$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle heltall $n \geq 1$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden P_k er sann har vi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i2^i &= \sum_{i=1}^{k} i2^i + (k+1)2^{k+1} \\ &= k2^{k+1} - 2 + (k+1)2^{k+1} \\ &= (2k+2)2^{k+1} - 2 \\ &= (k+1)2^{k+2} - 2.\end{aligned}$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann.
Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [x] Påstanden P_n er feil, og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- [ ] Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!