UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 7. oktober 2009.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 1110111_2 er det samme som det desimale tallet

- [x] 119
- [ ] 121
- [ ] 116
- [ ] 125
- [ ] 117

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det heksadesimale tallet $f4f_{16}$

- [ ] 111100001101_2
- [ ] 111100000011_2
- [ ] 110000001111_2
- [x] 111101001111_2
- [ ] 111100001111_2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Desimaltallet 5.3 kan skrives på binær form som

☑ $101.0100110011001\cdots$ der sifrene 1001 gjentas uendelig mange ganger

☐ 101.0100110011001101

☐ 101.011

☐ $101.0101010101010101\cdots$ der sifrene 01 gjentas uendelig mange ganger

☐ $101.0110011001100110\cdots$ der sifrene 0110 gjentas uendelig mange ganger

Oppgave 4. I åttetallssystemet blir det desimale tallet 40.125

☐ 49.1_8

☐ 40.1_8

☐ 50.3_8

☐ 40.11_8

☑ 50.1_8

Oppgave 5. I siffersystemet med grunntall $\beta = 4$ blir det desimale tallet 2.4

☐ 2.3_4

☐ 2.10303_4

☐ 2.103_4

☐ 2.1_4

☑ krever uendelig mange siffer

Oppgave 6. Tallet

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{8}}{5-\sqrt{8}}$$

er

☐ et rasjonalt tall

☑ $1+\sqrt{2}$

☐ $\sqrt{2}-1$

☐ $\sqrt{8}+\sqrt{2}$

☐ $\sqrt{8}-\sqrt{2}$

Oppgave 7. En følge er definert ved $x_n = e^{-n^2}$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

☐ $1/2$

☐ er ikke definert

☑ 0

☐ 1

☐ e

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(2-x)^{99}$. Hva blir da koeffisienten foran x^{98}?

☐ 99

☐ 1

☐ -198

☐ -99

☑ 198

Oppgave 9. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a=-1$ for funksjonen $f(x)=x^4$?

☐ $3+9x+7x^2$

☑ $3+8x+6x^2$

☐ $-x$

☐ x^2

☐ x^4

Oppgave 10. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a=1$ for funksjonen $f(x)=x^2$?

☑ x^2

☐ $-1+x+x^2$

☐ $3-x-x^2$

☐ 0

☐ x

Vi minner om at dividerte differenser tilfredstiller relasjonene

$$f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_1,\dots,x_{k-1},x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

og $f[x_k]=f(x_k)$.

Oppgave 11. Vi har funksjonen $f(x)=\sin x$ og punktene $x_0=0$, $x_1=\pi/2$ og $x_2=\pi$. Da har den dividerte differansen $f[x_0,x_1,x_2]$ verdien

☑ $-4/\pi^2$

☐ $4/\pi^2$

☐ $2/\pi$

☐ $-2/\pi$

☐ 0

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 12. Vi har funksjonen $f(x) = x^4$ og punktene $x_i = i$, for $i = 0$, 1, ..., 5. Da har den dividerte differansen $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ verdien

- [ ] 24
- [ ] 6
- [ ] 2
- [ ] 12
- [x] 0

Oppgave 13. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^3$ med et polynom p_2 av grad 2 i punktene 0, 1, 2. Da er p_2 lik

- [ ] x^2
- [ ] x^3
- [x] $x + 3x(x - 1)$
- [ ] $x - 3x(x - 1)$
- [ ] $4x^2 - 3x$

Oppgave 14. Du skal tilnærme funksjonen $f(x) = e^x$ med et Taylor-polynom av grad n på intervallet $[0, 1]$, utviklet om $a = 0$. Det viser seg at feilen er begrenset av

$$\frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Hva er den minste graden n som gjør at feilen blir mindre enn 0.01 for alle x i intervallet $[0, 1]$?

- [ ] $n = 1$
- [ ] $n = 3$
- [ ] $n = 4$
- [x] $n = 5$
- [ ] $n = 7$

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = (-1)^{n+1}, \quad x_0 = 1/2$$

har løsningen

- [ ] $x_n = (-1/2)^{n+1}$
- [x] $x_n = (-1)^n/2$
- [ ] $x_n = 1/2$
- [ ] $x_n = (n + 1)/2$
- [ ] $x_n = n$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

☐ $x_n = n$

☐ $x_n = n2^{n-1}$

☑ $x_n = (4^n - 1)/3$

☐ $x_n = \big(1 - (-1)^n\big)$

☐ $x_n = -\sin(5n\pi/3)$

Oppgave 17. Vi har en følge definert ved

$$y_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

og en annen følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definert ved differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2, \quad x_1 = 1.$$

For $n \geq 1$ er da $y_n - x_n$ gitt ved

☐ $(n-1)^2$

☐ $(n-1)^3$

☑ 0

☐ $(n-1)n^2$

☐ $n2^n$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - \frac{x_n}{3} = 2, \quad x_0 = 2,$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall. For alle n over en viss grense vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

☑ 3

☐ 1

☐ 0

☐ $3 - 3^{-n}$

☐ Det blir overflow

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 1, \quad n \geq 1, \quad x_0 = 1/7, \; x_1 = 1/7$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For alle n over en viss grense vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat:

☐ $1/3$

☐ 5

(Fortsettes på side 6.)

☐ 0

☑ Det blir overflow

☐ 3^n

Oppgave 20. Vi lar P_n betegne påstanden

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}.$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle heltall $n \geq 1$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden vi antar at P_k er sann vet vi at

   $$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{k},$$

   og vi må vise at da er også

   $$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{k+1}.$$

   Vi har følgende relasjoner

   $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geq \frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \sqrt{k+1}. \end{aligned}$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann.
Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

☐ Påstanden P_n er feil, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

☐ Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

☑ Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige

☐ Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!