UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 13. oktober 2010.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1. Det binære tallet 11101101_2 er det samme som det desimale tallet

A: 221

B: 227

C: 231

D: 255

✓**E:** 237

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det heksadesimale tallet $a.bc_{16}$

A: 1010.101101_2

✓**B:** 1010.101111_2

C: 1010.001101_2

D: 1011.001111_2

E: 1110.00001111_2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Desimaltallet 1.7 kan skrives på binær form som

A: $1.0100110010001\cdots$ der sifrene 10001 gjentas uendelig mange ganger

B: 1.10100100

C: 1.111

✓**D:** $1.1011001100110011\cdots$ der sifrene 0110 gjentas uendelig mange ganger

E: $1.010010010010\cdots$ der sifrene 010 gjentas uendelig mange ganger

Oppgave 4. For hvilket grunntall β vil det rasjonale tallet $2/3$ kunne representeres med en endelig sifferutvikling?

A: $\beta = 2$

B: $\beta = 4$

C: $\beta = 16$

D: $\beta = 10$

✓**E:** $\beta = 6$

Oppgave 5. For hvilket grunntall β vil tallet 26 ha representasjonen 101_β?

✓**A:** $\beta = 5$

B: $\beta = 8$

C: $\beta = 6$

D: $\beta = 2$

E: $\beta = 16$

Oppgave 6. Tallet

$$\frac{\pi + \sqrt{\pi}}{\pi - \sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi} - 1}$$

er

A: et rasjonalt tall på formen $a/2^n$ der n er et passende naturlig tall og $0 < a < n$

B: $1 + \sqrt{\pi}$

C: 0

✓**D:** 1

E: et tall på formen $\sqrt{\pi}/2^n$ der n er et passende naturlig tall

Oppgave 7. En følge er definert ved $x_n = \sqrt{n}/(1 + n^2)$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

A: $1/2$

B: er ikke definert

✓**C:** 0

D: 1

E: $\sqrt{2}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = 1/(1+x)$?

A: $1 + x^2$

✓**B:** $1 - x + x^2$

C: x^2

D: $1 + x + x^2$

E: $1 - x^2$

Oppgave 9. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin x^2$?

A: $1 + x + x^2$

✓**B:** x^2

C: x

D: $x + x^2$

E: $1 + x^2$

Oppgave 10. Vi har funksjonen $f(x) = \cos x$ og punktene $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ og $x_2 = \pi$. Da har den dividerte differansen $f[x_0, x_1, x_2]$ verdien

A: $-4/\pi^2$

B: $4/\pi^2$

C: $2/\pi$

D: $-2/\pi$

✓**E:** 0

Vi minner om at dividerte differanser tilfredstiller de to relasjonene

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad k > 0$$

og $f[x] = f(x)$.

Oppgave 11. Vi tilnærmer funksjonen $f(x) = \cos x$ med sitt Taylor-polynom av grad n om $a = 0$. Hva er minste verdi av n som gjør den absolutte feilen i tilnærmingen mindre enn 0.001 for alle x i intervallet $[0, 1]$?

A: $n = 1$

B: $n = 3$

C: $n = 5$

✓**D:** $n = 6$

E: $n = 8$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 12. Anta at vi beregner Taylor-polynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = e^x$. Hva kan vi da si om feilleddet $R_n(x)$?

A: Feilleddet vil for hver x bli større når n øker

✓**B:** For ethvert reelt tall x vil feilleddet gå mot 0 når n går mot ∞

C: Feilleddet er 0 overalt

D: Feilleddet vil gå mot 0 for alle x i intervallet $[0, 1]$, men ikke for andre verdier av x

E: For alle n og alle reelle tall x vil absoluttverdien til feilleddet være mindre enn 1

Oppgave 13. Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for minst en verdi av x når det beregnes på datamaskin ved hjelp av flyttall?

✓**A:** $x^3 + \pi$

B: $1 + x^2$

C: $x^2 + 2(\cos x)^2$

D: $1/(1 + x^2)$

E: $e^x + x^2$

Oppgave 14. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^3$ med et polynom p_3 av grad 3 i punktene 0, 1, 2, 3. Da er p_3 lik

A: x^2

✓**B:** x^3

C: $x + 3x(x - 1) + x^3$

D: $x + x^3$

E: $-x^3$

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = a, \; n \geq 0, \quad x_0 = 1$$

har løsningen $x_n = 2^{n+1} - 1$. Hva er da a?

A: $a = 0$

✓**B:** $a = 1$

C: $a = -1$

D: $a = 2$

E: $a = 3$

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0, \; n \geq 0, \quad x_0 = 1, \; x_1 = 4.$$

Hva er løsningen?

A: $x_n = 3n + 1$

B: $x_n = 3^n + 1$

C: $x_n = 3^n$

✓**D:** $x_n = (3 + n)3^{n-1}$

E: $x_n = n3^n + 1$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} = x_n^4, \ n \geq 0, \quad x_0 = a$$

der $a \neq 0$. Da er løsningen gitt ved

A: $x_n = a^{n+1}$

✓**B:** $x_n = a^{(4^n)}$

C: $x_n = a4^n$

D: $x_n = a2^n$

E: $x_n = a$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = 2, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 2,$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall. For alle n over en viss grense vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat:

A: -1

B: $-1 + 3^{n+1}$

C: 0

D: 2

✓**E:** Det blir overflow

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$5x_{n+2} - 16x_{n+1} + 3x_n = 8, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 0, \ x_1 = -4/5$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For alle n over en viss grense vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat:

A: -1

B: $-4/5$

C: 0

✓**D:** Det blir overflow og deretter `NaN`

E: $5^{-n} - 1$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 20. Vi har differensligningen

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, \; n \geq 2, \qquad x_0 = 1, x_1 = 2.$$

Vi lar nå P_n betegne påstanden

P_n: x_n er enten 1 eller 2.

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle heltall $n \geq 0$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_0 og P_1 er sanne.

2. Anta nå at vi har bevist at P_0, …, P_k er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at P_{k+1} også er sann. Fra induksjonshypotesen vet vi at både x_{k-1} og x_k er enten 1 eller 2 så

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{x_{k-1}}$$

   er også enten 1 eller 2. Altså er også P_{k+1} sann.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

✓**B:** Påstanden P_n er feil, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

C: Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

D: Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige

E: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!