UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 12. oktober 2011.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1. Tallet 201201_3 (representert i 3-tallsystemet) er det samme som det desimale tallet

A: 493

B: 501

C: 541

D: 545

✓**E:** 532

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det heksadesimale tallet $d.2a_{16}$

✓**A:** 1101.0010101_2

B: 1110.1011111_2

C: 1001.0011011_2

D: 1101.0010110_2

E: 1101.0001111_2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Desimaltallet 0.3 kan skrives i 3-tallsystemet som

A: $0.0220021\cdots_3$ der sifrene 0021 gjentas uendelig mange ganger

B: 0.02201_3

C: 0.0220022_3

D: $0.022022022022\cdots_3$ der sifrene 022 gjentas uendelig mange ganger

✓**E:** $0.02200220022\cdots_3$ der sifrene 0022 gjentas uendelig mange ganger

Oppgave 4. For hvilket grunntall β vil det rasjonale tallet 1/6 kunne representeres med en endelig sifferutvikling?

A: $\beta = 2$

B: $\beta = 4$

✓**C:** $\beta = 12$

D: $\beta = 10$

E: $\beta = 7$

Oppgave 5. Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

A: Datamaskiner vil aldri gi avrundingsfeil så lenge vi bare bruker positive tall

B: Det er ingen grense for hvor store tall vi kan arbeide med på en gitt datamaskin

C: Med 64 bits heltall kan vi representere tall av størrelse helt opp til 2^{65}

✓**D:** Vi kan representere større tall med 64 bits flyttall enn med 64 bits heltall

E: Både 1/6 og 1/7 kan representeres med endelige sifferutviklinger i 60-tallsystemet

Oppgave 6. Tallet

$$\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

er det samme som

A: $\sqrt{5}$

B: $1+\sqrt{5}$

C: $(\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+1)$

D: 1

✓**E:** 3/2

Oppgave 7. En følge er definert ved $x_n = n^{1/3}/(1+2n^{1/3})$ for $n \geq 1$. Hva er minste øvre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

✓**A:** 1/2

B: er ikke definert

C: 0

D: 1

E: $2^{1/3}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = x/(1 + x^2)$?

A: $x - x^2$

B: $x + x^2$

C: $x + x^3$

D: $x - x^2 + x^3$

✓**E:** $x - x^3$

Oppgave 9. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = e^{\sin x}$?

A: $1 + x + x^2$

B: $1 - x + x^2/2$

C: $1 + x$

✓**D:** $1 + x + x^2/2$

E: $1 - x + x^2/3$

Oppgave 10. For hvilken verdi av c blir Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = (\sin x) - 2x/(c + x^2)$ lik $x^3/3$?

A: $c = 1$

B: $c = 0$

C: $c = -1$

✓**D:** $c = 2$

E: $c = -2$

Oppgave 11. La β være et naturlig tall som er større enn 1, og sett

$$A(\beta) = \sum_{i=0}^{\beta-1} i\beta^i.$$

For hvilken verdi av β vil $1000 \leq A(\beta) \leq 10000$?

A: $\beta = 3$

B: $\beta = 4$

✓**C:** $\beta = 5$

D: $\beta = 6$

E: $\beta = 7$

Oppgave 12. Vi tilnærmer funksjonen $f(x) = xe^{-x}$ med sitt Taylor-polynom av grad n om $a = 0$. Hva er minste verdi av n som gjør den absolutte feilen i tilnærmingen mindre enn 0.01 for alle x i intervallet $[0, 1]$?

A: $n = 1$

B: $n = 3$

✓**C:** $n = 5$

D: $n = 6$

E: $n = 8$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for minst en verdi av x når det beregnes på datamaskin ved hjelp av flyttall?

A: $x^4 + 2$
B: $x^2 + x^4$
C: $5x^2 + 1$
D: $x/(1 + x^2)$
✓**E:** $1/2 + \sin(-x^2)$

Oppgave 14. Hvis vi interpolerer datasettet

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	1	2

med et polynom av grad 3 blir interpolanten

A: $2x - 3x(x-1)/2 - 3x(x-1)(x-2)/6$
B: $2x - 3x(x-1) + 5x(x-1)(x-2)/6$
C: $2x - 3x(x-2)/2 + x(x-1)(x-2)/6$
✓**D:** $2x - 3x(x-1)/2 + 5x(x-1)(x-2)/6$
E: $2x - 3x(x-1)/2 + 5x(x-1)(x-2)/3$

Vi minner om at dividerte differanser tilfredstiller de to relasjonene

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad k > 0$$

og $f[x] = f(x)$.

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = a2^n, \; n \geq 0, \quad x_0 = 0$$

har løsningen $x_n = n2^n$. Hva er da a?

A: $a = 0$
B: $a = 1$
C: $a = -1$
✓**D:** $a = 2$
E: $a = 3$

Oppgave 16. En annenordens, homogen, differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C3^n + D2^{-n}.$$

Hva kan ligningen da være?

✓**A:** $2x_{n+2} - 7x_{n+1} + 3x_n = 0$
B: $2x_{n+2} + 5x_{n+1} - 3x_n = 0$
C: $2x_{n+2} + 7x_{n+1} + 3x_n = 0$
D: $2x_{n+2} - 7x_{n+1} - 3x_n = 0$
E: $2x_{n+2} + 7x_{n+1} - 3x_n = 0$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdi,

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 0.$$

Hva er løsningen?

✓**A:** $x_n = 3^n - 3n2^{n-1}$

B: $x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

C: $x_n = (n+2)3^n - (n+1)2^n$

D: $x_n = 1 - n$

E: $x_n = 3^n$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = 1, \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: 0

B: n

C: $-1/6$

✓**D:** overflow

E: 2

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$9x_{n+2} - 3x_{n+1} - 2x_n = 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = -1/3$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall. For store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ domineres av

A: 1

B: $1/2$

C: $(-1/3)^n$

✓**D:** $(2/3)^n$

E: $(1/3)^n$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 20. For hvert naturlig tall $n \geq 4$ lar vi P_n betegne påstanden

P_n: $n! > 2^n$.

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle naturlige tall $n \geq 4$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_4 er sann.
2. Anta nå at vi har bevist at $P_4, \ldots, P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at P_{k+1} også er sann. Fra induksjonshypotesen vet vi at $k! > 2^k$ så

   $$(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

   Altså er også P_{k+1} sann.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for $n \geq 4$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

B: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 4$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

C: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 4$, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

✓**D:** Påstanden P_n er riktig for alle $n \geq 4$ og induksjonsbeviset er riktig

E: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!