UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 10. oktober 2012.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1. Det desimale tallet 153 representeres i totallssystemet som

A: 10001001_2

B: 10111011_2

C: 11010111_2

✓**D:** 10011001_2

E: 1100001101_2

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det heksadesimale tallet $e.0c_{16}$

✓**A:** 1110.000011_2

B: 1110.00001101_2

C: 1100.0000011_2

D: 1101.0010110_2

E: 1101.00001011_2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Desimaltallet 0.125 kan skrives i 2-tallsystemet som

A: 0.101_2

B: 0.011_2

C: 0.111_2

D: $0.0101\cdots_2$ der sifrene 101 gjentas uendelig mange ganger

✓**E:** 0.001_2

Oppgave 4. For hvilket grunntall β vil det rasjonale tallet 1/18 kunne representeres med en endelig sifferutvikling?

A: $\beta = 2$

B: $\beta = 8$

✓**C:** $\beta = 12$

D: $\beta = 10$

E: $\beta = 7$

Oppgave 5. Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

A: Avrundingsfeil kan oppstå når vi bruker 64 bits heltall

B: 64 bits flyttall kan være vilkårlig små

C: Med 32 bits heltall kan vi representere tall av størrelse helt opp til 2^{33}

D: Vi kan representere større tall med 32 bits heltall enn med 64 bits flyttall

✓**E:** Både 3/5 og 1/6 kan representeres med endelige sifferutviklinger i 60-tallsystemet

Oppgave 6. Tallet

$$\frac{\ln(e^{(\pi+\pi^2)/\pi-1})}{\pi}$$

er det samme som

A: $\ln \pi$

B: 2π

C: e

✓**D:** 1

E: $1/\pi$

Oppgave 7. En følge er definert ved $x_n = (1+5n+n^2)/(1+n^3)$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

A: $1/2$

B: er ikke definert

✓**C:** 0

D: 1

E: $-1/2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = 1/(1 + x)$?

A: $1 + x + x^2 + x^3$

B: $x + x^2$

C: $1 - x + 2x^2 - 6x^3$

D: $1 + x + x^2$

✓**E:** $1 - x + x^2 - x^3$

Oppgave 9. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = (\cos x)^2$?

A: $1 - x + x^2$

B: $1 - x$

✓**C:** $1 - x^2$

D: $1 + x^2/2$

E: $1 + x^2$

Oppgave 10. For hvilken verdi av c blir Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = cx + \sin(x/c)$ lik $-2x + x^3/6$?

A: $c = 1$

B: $c = 1/2$

✓**C:** $c = -1$

D: $c = 2$

E: $c = -2$

Oppgave 11. For hvilken verdi av β har vi at $1021_\beta = 136$?

A: $\beta = 3$

B: $\beta = 4$

✓**C:** $\beta = 5$

D: $\beta = 6$

E: $\beta = 7$

Oppgave 12. Vi tilnærmer funksjonen $f(x) = \cos x$ med sitt Taylor-polynom av grad n om $a = 0$. Hva er minste verdi av n som gjør at den absolutte feilen i tilnærmingen er mindre enn 0.001 for alle x i intervallet $[0, 1]$?

A: $n = 3$

B: $n = 4$

C: $n = 5$

✓**D:** $n = 6$

E: $n = 7$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil for minst en verdi av x når det beregnes på datamaskin ved hjelp av flyttall?

✓**A:** $\ln x + (\cos x)^2$

B: $x^3 + x^5$

C: $x^2 + x^4$

D: $x/((\sin x)^2 + x^2)$

E: $1/2 + (\sin x)^2$

Oppgave 14. Differensligningen

$$x_{n+1} + ax_n = 6n^2,\ n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 0$ har løsningen $x_n = 2n^3 - 3n^2 + n$. Hva er da a?

A: $a = 0$

B: $a = 1$

✓**C:** $a = -1$

D: $a = 3$

E: $a = 2$

Oppgave 15. En annenordens lineær og homogen differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C2^{-n} + D.$$

Hva er da ligningen?

✓**A:** $2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$

B: $2x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0$

C: $2x_{n+2} + x_{n+1} + 3x_n = 0$

D: $2x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$

E: $2x_{n+2} + 5x_{n+1} - x_n = 0$

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdier,

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 2^n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = -2/3.$$

Hva er løsningen?

A: $x_n = \frac{1}{3}n2^n$

B: $x_n = 2^n + 3(-1)^n$

C: $x_n = n2^n + 2^n + (-1)^n$

D: $x_n = -\frac{4}{3}n2^n + 2^n$

✓**E:** $x_n = \frac{1}{6}n2^n + (-1)^n$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - 6x_n = 1, \quad n \geq 1, \quad x_1 = -1/5$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi et resultat som svarer til

A: 0

B: n

C: $-1/5$

✓**D:** overflow

E: 1

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{5}{6}x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n = 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 1/2$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall. For n tilstrekkelig stor vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

✓**A:** 0

B: 3^{-n}

C: 2^{-n}

D: $2^{-n} + 3^{-n}$

E: overflow

Oppgave 19. En lineær, andreordens, inhomogen differensligning har den generelle løsningen

$$x_n = 1 + C3^n + D5^{-n}.$$

To startverdier gjør at løsningen blir $x_n = 1 + 5^{-n}$. Hvis denne ligningen simuleres på datamaskin med 64-bits flyttall vil, for tilstrekkelig store n, den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: 0

B: $1 + 5^{-n}$

C: 3^n

✓**D:** overflow

E: 1

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 20. For hvert naturlig tall $n \geq 0$ lar vi P_n betegne påstanden

P_n: $3^{n+2} + 2^{3n+1}$ er delelig med 5.

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle naturlige tall $n \geq 0$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_0 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_0, \ldots, P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at da er også P_{k+1} sann. Vi ser at

$$\begin{aligned} 3^{(n+1)+2} + 2^{3(n+1)+1} &= 3 \cdot 3^{n+2} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\ &= 3 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 2^{3n+1} - 3 \cdot 2^{3n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\ &= 3\left(3^{n+2} + 2^{3n+1}\right) + 5 \cdot 2^{3n+1}. \end{aligned}$$

   Siden P_k er sann følger det at $3\left(3^{n+2} + 2^{3n+1}\right)$ er delelig med 5, og $5 \cdot 2^{3n+1}$ er opplagt delelig med 5. Altså er summen også delelig med 5, og P_{k+1} er dermed også sann.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for $n \geq 0$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

B: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 0$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

✓**C:** Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 0$, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

D: Påstanden P_n er riktig for alle $n \geq 0$ og induksjonsbeviset er riktig

E: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!