

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.

Eksamensdag: Onsdag 9. oktober 2013.

Tid for eksamen: 15:00 – 17:00.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Formelark.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

**Svarene føres på eget svarark.**

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

**NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!**

### Oppgaveark

**Oppgave 1.** Det desimale tallet 165 representeres i totalssystemet som

A: 1011 0101<sub>2</sub>

B: 1110 0101<sub>2</sub>

C: 1010 0100<sub>2</sub>

D: 1010 0111<sub>2</sub>

✓ E: 1010 0101<sub>2</sub>

**Oppgave 2.** Skrevet i totalssystemet blir det heksadesimale tallet  $a7.5d_{16}$

A: 1010 0111.1101 1101<sub>2</sub>

✓ B: 1010 0111.0101 1101<sub>2</sub>

C: 1110 0111.0101 1101<sub>2</sub>

D: 1010 1111.0101 1101<sub>2</sub>

E: 1011 0111.0101 1111<sub>2</sub>

**Oppgave 3.** Det rasjonale tallet  $3/5$  kan skrives i 2-tallsystemet som

- ✓ **A:**  $0.1001\ 1001\ 1001 \cdots_2$  der sifrene 1001 gjentas uendelig mange ganger
- B:**  $0.011_2$
- C:**  $0.11_2$
- D:**  $0.0101\ 0101\ 0101 \cdots_2$  der sifrene 01 gjentas uendelig mange ganger
- E:**  $0.1101\ 1101\ 1101 \cdots_2$  der sifrene 1101 gjentas uendelig mange ganger

**Oppgave 4.** Det oktale tallet  $56.27_8$  representeres i totallsystemet som

- A:**  $11\ 0110.0101\ 11_2$
- B:**  $10\ 1110.1101\ 11_2$
- ✓ **C:**  $10\ 1110.0101\ 11_2$
- D:**  $10\ 1010.0111\ 11_2$
- E:**  $10\ 1010.0101\ 01_2$

**Oppgave 5.** Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

- ✓ **A:** Det rasjonale tallet  $65/81$  kan representeres med en endelig sifferutvikling i 6-tallsystemet
- B:** Det rasjonale tallet  $5/12$  kan representeres med en endelig sifferutvikling i 3-tallsystemet
- C:** Det rasjonale tallet  $5/12$  kan representeres med en endelig sifferutvikling i 2-tallsystemet
- D:** Både  $1/7$  og  $1/8$  kan representeres med endelige sifferutviklinger i 60-tallsystemet
- E:** Hvis vi bruker 128 bits flyttall får vi aldri problemer med avrundingsfeil

**Oppgave 6.** Tallet

$$\frac{\sqrt{32} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

er det samme som

- A:**  $\sqrt{32} - 3$
- B:**  $\sqrt{8} + 5$
- C:**  $0$
- ✓ **D:**  $9 - 5\sqrt{2}$
- E:**  $\sqrt{32} + 1$

**Oppgave 7.** Hva er minste øvre skranke for mengden

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^6 - 2 < 0\}?$$

- A:**  $2$
- B:**  $6$
- ✓ **C:**  $2^{1/6}$
- D:**  $1$
- E:**  $\sqrt{2}$

(Fortsettes på side 3.)

**Oppgave 8.** Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om  $a = 0$  for funksjonen  $f(x) = x^5 + 3x - 1$ ?

**A:**  $-1 + 3x + 2x^2$

**B:**  $-1 + 2x$

**C:**  $-1 + 3x - x^2$

**D:**  $-1 + 3x + x^2$

**✓E:**  $-1 + 3x$

**Oppgave 9.** Hvilken av følgende differensligninger er lineær?

**A:**  $x_{n+1}^2 - x_n = n$

**✓B:**  $x_{n+3} - nx_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = \sin n$

**C:**  $x_{n+2} - \sin x_n = 3^n$

**D:**  $x_{n+2} - x_{n+1} x_n = 1$

**E:**  $x_{n+2}x_{n+1} - x_n = n$

**Oppgave 10.** For hvilken av følgende verdier av  $c$  blir Taylor-polynomet av grad 2 om  $a = 0$  for funksjonen  $f(x) = cx + e^{-x/c}$  lik  $1 + x^2/2$ ?

**A:**  $c = 3$

**B:**  $c = 1/2$

**✓C:**  $c = -1$

**D:**  $c = 2$

**E:**  $c = -2$

**Oppgave 11.** Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om  $a = \pi/2$  for funksjonen  $f(x) = \sin x$ ?

**A:**  $x - x^3/6$

**✓B:**  $1 - (x - \pi/2)^2/2$

**C:**  $1 + (x - \pi/2)^2/2$

**D:**  $1 - (x - \pi/2)^2/3$

**E:**  $1 + x^2$

**Oppgave 12.** For hvilken verdi av  $\beta$  har vi at  $100_\beta = 10_{4\beta}$ , med andre ord at 100 i  $\beta$ -tallsystemet er lik 10 i  $4\beta$ -tallsystemet?

**A:**  $\beta = 8$

**B:**  $\beta = 6$

**C:**  $\beta = 5$

**✓D:**  $\beta = 4$

**E:**  $\beta = 2$

(Fortsettes på side 4.)

**Oppgave 13.** Vi tilnærmer funksjonen  $f(x) = e^x$  med sitt Taylorpolynom av grad  $n$  om  $a = 0$ . Hva er minste verdi av  $n$  som gjør at den absolutte feilen i tilnærmingen er mindre enn 0.001 for alle  $x$  i intervallet  $[-1, 0]$ ?

- A:  $n = 3$
- B:  $n = 4$
- C:  $n = 5$
- ✓D:  $n = 6$
- E:  $n = 7$

**Oppgave 14.** Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for negative flyttall med stor absoluttverdi?

- A:  $x^2 + x^4$
- B:  $x + e^x$
- C:  $x + \sin x$
- D:  $1 + x^2$
- ✓E:  $\sqrt{x^2 + 2} + x$

**Oppgave 15.** Differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = n, \quad n \geq 0$$

med startverdi  $x_0 = 0$  har løsningen

- ✓A:  $x_n = (3^n - 2n - 1)/4$
- B:  $x_n = (3^n + 2n - 1)$
- C:  $x_n = (3^n - 1)/2$
- D:  $x_n = (3^n + 3n - 1)/6$
- E:  $x_n = 3^n - 1$

**Oppgave 16.** En annenordens lineær og homogen differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C2^n + D3^{-n}.$$

Hva kan da ligningen være?

- A:  $3x_{n+2} - 7x_{n+1} - 2x_n = 0$
- B:  $2x_{n+2} + 7x_{n+1} + 2x_n = 0$
- C:  $3x_{n+2} + 7x_{n+1} + 2x_n = 0$
- ✓D:  $3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = 0$
- E:  $3x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = 0$

(Fortsettes på side 5.)

**Oppgave 17.** Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdier,

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -2/3.$$

Hva er løsningen?

- A:**  $x_n = 1 - 5n3^{n-2}$
- B:**  $x_n = 2^n - 8n/3$
- C:**  $x_n = 3^n - 11n2^{n-1}/3$
- D:**  $x_n = 2^n - 8n3^{n-2}$
- E:**  $x_n = 2^{n+1} - 3^n$

**Oppgave 18.** Vi har differensligningen

$$3x_{n+2} - 5x_{n+1} = 1/7, \quad x_1 = -1/14$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store  $n$  vil da den beregnede løsningen  $\bar{x}_n$  gi som resultat

- A:** 0
- B:**  $-1/14$
- C:**  $(5/3)^n$
- D:** overflow
- E:** 1

**Oppgave 19.** Vi har differensligningen

$$5x_{n+2} - 16x_{n+1} + 3x_n = 0.$$

For hvilket par av startverdier vil den eksakte løsningen forbli begrenset mens den simulerte løsningen (med 64 bits flyttall) vil gi overflow?

- A:**  $x_0 = 1, \quad x_1 = 1$
- B:**  $x_0 = 0, \quad x_1 = 1/3$
- C:**  $x_0 = 1, \quad x_1 = 2$
- D:**  $x_0 = 1, \quad x_1 = 1/5$
- E:**  $x_0 = 1, \quad x_1 = 2/5$

(Fortsettes på side 6.)

**Oppgave 20.** For hvert naturlig tall  $n$  lar vi  $P_n$  betegne påstanden

$$P_n : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Et induksjonsbevis for at  $P_n$  er sann for alle naturlige tall kan være som følger:

1. Vi ser lett at  $P_1$  er sann.
2. Anta nå at vi har bevist at  $P_k$  er sann for en  $k \geq 1$ . For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at da er også  $P_{k+1}$  sann. Vi ser at

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Dermed stemmer formelen også for  $n = k + 1$  om den stemmer for  $n = k$ , så påstanden  $P_n$  er sann for alle naturlige tall  $n$ .

Hvilket av følgende utsagn er sant?

- A:** Påstanden  $P_n$  er sann for  $n \geq 1$ , men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- B:** Påstanden  $P_n$  er ikke sann for alle  $n \geq 1$ , og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- C:** Påstanden  $P_n$  er ikke sann for alle  $n \geq 1$ , og del 1 av induksjonsbeviset er feil
- ✓ **D:** Påstanden  $P_n$  er riktig for alle  $n \geq 1$  og induksjonsbeviset er riktig
- E:** Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

*Det var det!*