UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 12. oktober 2016.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1. Det desimale tallet 219 representeres i totallssystemet som

A: $1101\ 0111_2$

B: $1010\ 1011_2$

C: $1101\ 1010_2$

D: $1110\ 0111_2$

✓**E:** $1101\ 1011_2$

Oppgave 2. I 16-tallsystemet blir det binære tallet $110\ 1110.01011_2$ skrevet som

✓**A:** $6e.58_{16}$

B: $7f.68_{16}$

C: $5e.66_{16}$

D: $6e.56_{16}$

E: $6e.78_{16}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Tallet 401_5 i 5-tallsystemet representerer det desimale tallet

A: 41

B: 51

C: 111

✓**D:** 101

E: 91

Oppgave 4. Det rasjonale tallet 5/6 kan skrives i 2-tallsystemet som

A: $0.1111\ 0011\ 0011\cdots_2$ der sifrene 0011 gjentas uendelig mange ganger

B: $0.1101\ 0011\ 0011\cdots_2$ der sifrene 0011 gjentas uendelig mange ganger

✓**C:** $0.1101\ 0101\ 0101\cdots_2$ der sifrene 0101 gjentas uendelig mange ganger

D: $0.1111\ 1011\ 1011\cdots_2$ der sifrene 1011 gjentas uendelig mange ganger

E: $0.1111\ 0101_2$

Oppgave 5. Tallet 3313_4 i 4-tallsystemet skrives i 2-tallsystemet som

✓**A:** $1111\ 0111_2$

B: $1101\ 0011_2$

C: $1111\ 1011_2$

D: $1111\ 0011_2$

E: $1101\ 0111_2$

Oppgave 6. Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

✓**A:** Tallet 3/11 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 165-tallsystemet

B: Det rasjonale tallet 7/10 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 6-tallsystemet

C: Det rasjonale tallet 3/7 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 16-tallsystemet

D: I 60-tallsystemet kan alle rasjonale tall med nevner 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 representeres med en endelig sifferutvikling

E: Det rasjonale tallet 5/12 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 9-tallsystemet

Oppgave 7. Tallet

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}$$

er

✓**A:** -3

B: 1

C: 0

D: 2

E: irrasjonalt

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Hva er største nedre skranke for mengden

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ og } 1 < \tan x < 2\}?$$

A: 0
B: $\pi/2$
✓**C:** $\pi/4$
D: $\pi/6$
E: 1

Oppgave 9. Multiplikasjonen $11_6 \cdot 13_6$ (der begge tallene er representert i 6-tallsystemet) gir som resultat

A: 131_6
B: 141_6
✓**C:** 143_6
D: 133_6
E: 123_6

Oppgave 10. For hvilken verdi av $\beta > 3$ har vi $2_\beta \cdot 23_\beta = 101_\beta$ (der alle tallene er representert i β-tallsystemet)?

A: $\beta = 4$
✓**B:** $\beta = 5$
C: $\beta = 6$
D: $\beta = 7$
E: $\beta = 8$

Oppgave 11. Vi tilnærmer et tall a med et tall $\tilde{a}$ og den relative feilen blir 0.000047. Omtrent hvor mange sifre vil i så fall a og $\tilde{a}$ ha felles?

A: 1
B: 3
✓**C:** 5
D: 7
E: Ingen

Oppgave 12. Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for flyttall med liten absoluttverdi?

A: $x + x^3$
✓**B:** $1 - 1/(1 + x)$
C: $x + \sin x$
D: $x^4 - x^2$
E: $\sqrt{x^2 + 2} + x^4$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Hvilken av følgende differensligninger er lineær, inhomogen og av tredje orden?

A: $x_{n+1} + 2x_n = 3$

B: $x_{n+2} + x_{n+1}x_n x_{n+3} = 1$

C: $x_{n+4} + x_{n+2} + 3x_{n+1} - nx_n = \cos n$

✓**D:** $x_{n+3} + nx_{n+1} - x_n = 4$

E: $x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n = 0$

Oppgave 14. Differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = 2^n,\ \ n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 1$ har løsningen

A: $x_n = n + 1$

✓**B:** $x_n = 2^n$

C: $x_n = (n + 1)2^n$

D: $x_n = (n^2 + 1)2^n$

E: $x_n = 1/(n + 1)$

Oppgave 15. For hvilken verdi av a har ligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = -n, \quad n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = a$ løsningen $x_n = n + 1$?

A: $a = 1/2$

B: $a = -2$

C: $a = -1$

D: $a = 0$

✓**E:** $a = 1$

Oppgave 16. Differensligningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 4$$

har løsningen

A: $x_n = 4(n + 1)$

✓**B:** $x_n = 1 - (-3)^n$

C: $x_n = 4n$

D: $x_n = n2^{n+1}$

E: $x_n = 8n/(n + 1)$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. En partikulærløsning av ligningen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = -2$$

er

A: $x_n = n^2$

✓**B:** $x_n = n$

C: $x_n = -2$

D: $x_n = -1$

E: $x_n = 0$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$5x_{n+2} - 11x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1, x_1 = 1/5$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: $1/5^n$ og så underflow (0)

✓**B:** $C2^n$ og så overflow. Her er C en passende konstant

C: $1/5^n$

D: 2

E: 1

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{5}{6}x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n = 1/3, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 3, x_1 = 11/6$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: $\bar{x}_n = 0$

B: $\bar{x}_n = 2^n$ og deretter overflow

✓**C:** $\bar{x}_n = 1$

D: $\bar{x}_n = 1 + 2^{-n} + 3^{-n}$

E: $\bar{x}_n = 1 + 2^{-n} + 3^{-n}$ og deretter underflow

Oppgave 20. For hvert naturlige tall n lar vi P_n betegne påstanden

$$P_n : \ 11^n - 6 \text{ er delelig med } 5.$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle naturlige tall kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at da er også P_{k+1} sann. Siden P_k er sann vet vi at $11^k = 5m + 6$ for et passende naturlig tall m. Vi ser da

(Fortsettes på side 6.)

at

$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 6 &= 11 \cdot 11^k - 6 \\ &= 11(5m + 6) - 6 \\ &= 55m + 60 \\ &= 5(11m + 12) \end{aligned}$$

Altså er også $11^{k+1} - 6$ delelig med 5 så P_{k+1} er sann om P_k er sann. Dermed er påstanden P_n sann for alle naturlige tall n.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for $n \geq 1$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

B: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

C: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

✓**D:** Påstanden P_n er riktig for alle $n \geq 1$ og induksjonsbeviset er riktig

E: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!