UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 9. oktober 2023.
Tid for eksamen:	09:00 – 11:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres i inspera.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1.

Det binære tallet $1100\ 1010_2$ er det samme som det desimale tallet

✓**A:** 202

B: 232

C: 198

D: 204

E: 210

Oppgave 2.

Skrevet i totallsystemet blir det heksadesimale tallet $82e_{16}$

A: $1000\ 1010\ 0110_2$

B: $1010\ 0110\ 1111_2$

C: $1001\ 0011\ 1100_2$

D: $1111\ 1010\ 1110_2$

✓**E:** $1000\ 0010\ 1110_2$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. På oktal form blir det heksadesimale tallet $f2.3_{16}$

A: 262.3_8

✓**B:** 362.14_8

C: 164.13_8

D: 152.16_8

E: 74.14_8

Oppgave 4. Tallet

$$\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}+\frac{1}{3}\sqrt{7}$$

er

A: et irrasjonalt tall

B: $2\sqrt{7}$

C: $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}$

D: $\frac{2}{3}$

✓**E:** $\frac{4}{3}$

Oppgave 5. Hvilket av følgende utsagn er sant?

✓**A:** Tallet $1/36$ kan representeres med endelig antall sifre i tallsystemet med base $\beta = 6$

B: Tallet $1/30$ kan representeres med endelig antall sifre i tallsystemet med base $\beta = 15$

C: Addisjon av to 64 bits flyttall kan aldri gi overflow

D: Det finnes irrasjonale tall som kan representeres eksakt med 64 bits flyttall

E: Addisjon av 64 bits flyttall på datamaskin gir aldri avrundingsfeil

Oppgave 6. Tallet $527/1024$ vil i det binære tallsystemet representeres med sifferutviklingen

A: $0.1001\ 00\cdots_2$ der 100 repeteres i det uendelige

✓**B:** $0.1000\ 0011\ 11_2$

C: $0.1000\ 0111\ 11_2$

D: $0.1100\ 0111\ 11_2$

E: $0.1000\ 0111\cdots_2$ der 0111 repeteres i det uendelige

Oppgave 7. $1/7$ vil i det heksadesimale tallsystemet bli

A: $0.239239\cdots_{16}$, der 239 repeteres i det uendelige

B: 0.239239_{16}

✓**C:** $0.249249\cdots_{16}$, der 249 repeteres i det uendelige

D: $0.2424\cdots_{16}$, der 24 repeteres i det uendelige

E: 0.249249_{16}

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. La β være et helt tall slik at $\beta \geq 7$. Hvis $146_\beta = 102$, så må

A: $\beta = 7$

✓**B:** $\beta = 8$

C: $\beta = 9$

D: $\beta = 10$

E: $\beta = 11$

Oppgave 9. Hva er minste øvre skranke for mengden

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 12 < 0\}?$$

A: $\sqrt{2}$

B: 3

✓**C:** 4

D: 0

E: 7

Oppgave 10. Hvis vi ganger ut $(x+3)^{10}$ så vil koeffisienten til x^7 bli

A: 1752

B: 1024

C: 324

✓**D:** 3240

E: 120

Du kan her få bruk for at binomialkoeffisientene er gitt ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Oppgave 11. Addisjonen $742_8 + 376_8$ gir

✓**A:** 1340_8

B: 340_8

C: 1270_8

D: 1022_8

E: 1742_8

Oppgave 12. Anta at vi har en datamaskin som representerer tall på normalform i 10-tallsystemet, med 4 siffer for signifikanden og 1 siffer for eksponenten. Addisjonen $0.1317 + 89.21$ vil på en slik maskin gi resultatet

A: 89.35

B: 89

C: 89.3

D: 89.3417

✓**E:** 89.34

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for svært store positive flyttall?

A: $\ln(2x) + \ln x$

✓**B:** $\ln(x+1) - \ln x$

C: $\cos^3 x - \cos^3(x+\pi)$

D: $x^4 - x$

E: $\sqrt{x+1} - |x|$

På oppgave 13 blir også alternativ C godkjent. Her hadde jeg ikke tenkt på at, for store x, så vil $x+\pi$ bli regnet ut til x (siden det brukes kun 53 bits for signifikanden). Derfor vil maskinens beregning av $\cos^3 x$ og $\cos^3(x+\pi)$ bli lik, og maskinen regner ut 0.
Matematisk er det klart at $\cos^3 x - \cos^3(x+\pi) = 2\cos^3 x$, så relativ feil blir $2\cos^3 x/(2\cos^3 x) = 1$, det vil si at vi har stor relativ feil.

Oppgave 14. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær, inhomogen, og av andre orden?

✓**A:** $x_{n+2} + 7nx_{n+1} + x_n = \sqrt{2n}$

B: $x_{n+1} - n^2 x_n = n^3$

C: $x_{n+2} - 7n^2 x_{n+1} + x_n = 0$

D: $x_{n+2} - 2x_{n+1}x_n = 2$

E: $x_{n+2} + \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = 3$

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = -2n^2$$

har en partikulærløsning

A: $x_n^p = n^2 - n + 1$

B: $x_n^p = n^2 - 1$

C: $x_n^p = n^2 + 1$

D: $x_n^p = n^2$

✓**E:** $x_n^p = n^2 + n + 1$

Oppgave 16. En annenordens lineær og homogen differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C2^{-n} + D4^{-n}.$$

Hva kan da ligningen være?

A: $8x_{n+2} - 6x_{n+1} - x_n = 0$

B: $6x_{n+2} - 8x_{n+1} + x_n = 0$

C: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$

✓**D:** $8x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$

E: $8x_{n+2} + 6x_{n+1} + x_n = 0$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdier,

$$x_{n+2} - 9x_{n+1} + 20x_n = 24n - 14, \quad n \geq 0, \quad x_0 = -1,\ x_1 = -2.$$

Hva er løsningen?

✓**A:** $x_n = 2n - 4^n$

B: $x_n = 3n - 5^n$

C: $x_n = 2n - 5^n$

D: $x_n = 2n - 4^n - 5^n$

E: $x_n = -n - 1$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$4x_{n+2} - 16x_{n+1} + 15x_n = 6, \quad n \geq 1, \quad x_0 = 3, \quad x_1 = 7/2,$$

og løser denne numerisk med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: 2

B: 0

C: $2 + (3/2)^n$

D: $2 + (5/2)^n$

✓**E:** overflow

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$2x_{n+2} - 11x_{n+1} + 5x_n = 0, \quad x_0 = 3, \quad x_1 = 3/2.$$

og løser denne med 64-bits flyttall på datamaskin. Kall den beregnede løsningen for $\bar{x}_n$. Vi har da at

A: $\bar{x}_n$ gir avrundingsfeil for alle n

B: $\bar{x}_n = 3 \cdot 5^n$ for alle n

C: $\bar{x}_n = 3 \cdot 2^{-n}$ for alle n

D: $\bar{x}_n = 3 \cdot 2^{-n}$ for små n, og $\bar{x}_n$ vil til slutt gi avrundingsfeil, men aldri overflow

✓**E:** $\bar{x}_n = 3 \cdot 2^{-n}$ for små n, og $\bar{x}_n$ vil til slutt gi avrundingsfeil, og etterhvert overflow

Oppgave 20. Vi har differensligningen

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1/2$$

Vi lar P_n betegne påstanden

$$P_n : x_n \text{ er enten } 1/2 \text{ eller } 1,$$

hvor $n \geq 0$. Vi forsøker å bruke induksjon til å vise at P_n er sann for $n \geq 0$:

1. Vi ser lett at P_0 og P_1 er sanne.
2. Anta nå at vi har bevist at $P_0, ..., P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at P_{k+1} også er sann. Fra induksjonshypotesen vet vi at både x_{k-1} og x_k er enten $1/2$ eller 1. Men da er $x_{k+1} = x_k/x_{k-1}$ også enten $1/2$ eller 1, slik at P_{k+1} også er sann.

(Fortsettes på side 6.)

Dermed er påstanden P_n sann for alle $n \geq 0$.
Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for alle $n \geq 2$, men del 1 av induksjonsbeviset er feil

B: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

✓**C:** Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 2$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

D: Påstanden P_n er sann for alle $n \geq 2$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

E: Påstanden P_n er sann for alle $n \geq 0$ og induksjonsbeviset er riktig

Det var det!