

Note by

Lars Kristiansen April 19, 2016.

- 1  $\forall x [\neg\neg\phi] \rightarrow \neg\neg\phi$  Q1
  - 2  $\forall x [\neg\neg\phi] \rightarrow \phi$  1, PC
  - 3  $\forall x [\neg\neg\phi] \rightarrow \forall x[\phi]$  QR, no free  $x$  in  $\forall x[\neg\neg\phi]$
  - 4  $\neg\forall x[\phi] \rightarrow \neg\forall x[\neg\neg\phi]$  3, PC
  - 5  $\neg\forall x[\phi] \rightarrow \exists x[\neg\phi]$  rewrites 4  
 $\exists x$  abbreviates  $\neg\forall x[\neg\ ]$
  - 6  $\neg\forall x[\phi]$  axiom
  - 7  $\exists x[\neg\phi]$  5, 6, PC
- 

This is a deduction of  $\exists x[\neg\phi]$  from  $\neg\forall x[\phi]$ .

Thus,  $\neg\forall x[\phi] \vdash \exists x[\neg\phi]$