UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1012 — Matematikk 2.
Eksamensdag:	Tirsdag 8. juni 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi betrakter vektorene i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

a) Betrakt påstanden '$\mathbf{b}$ er en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$'.
Formuler denne påstanden som en vektorlikning og på matriseform. Avgjør deretter om påstanden er sann eller gal.
Som hjelp får du opplyst at den reduserte trappeformen til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ er lik } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes side 2.)

b) Sett $U = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ og la A være 3×3 matrisen som har $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ som sine kolonnevektorer.

Angi en basis for U og avgjør om A er inverterbar.

c) Hvis du svarte i b) at A er inverterbar, finn A^{-1}. Hvis du svarte at den ikke er det, finn en basis for Nul A.

d) Vektoren $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$ er en kompleks egenvektor til A.

Finn den komplekse egenverdien som $\mathbf{z}$ tilhører. Angi deretter de andre (reelle eller komplekse) egenverdiene til A sammen med en tilhørende egenvektor.

Oppgave 2.

La Ω betegne området i xy-planet som avgrenses av trekanten med hjørner i $(0,0)$, $(1,-1)$ og $(1,1)$.

a) Beskriv Ω som et område av type I og beregn $\iint_\Omega (2y + e^{-x^2})\,dxdy$.

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (x + 2y - 4, 5x + 4y - 8), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

La C betegne randkurven til området Ω, som vi gjennomgår i positivt retning, dvs mot klokkeretningen (sett ovenfra).

b) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C.
Er $\mathbf{F}$ konservativt ?

c) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ kan skrives på formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,,\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\,,$$

for en 2×2 matrise A og en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

Angi A og $\mathbf{b}$. Begrunn deretter at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

Som hjelp får du opplyst at matrisen A har egenverdiene -1 og 6.

d) Anta at en deriverbar vektorvaluert funksjon $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tilfredstiller $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$ samt initialbetingelsen $\mathbf{r}(0) = (6,3)$.

Finn $x(t)$ og $y(t)$ der $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$.

(Fortsettes side 3.)

e) Vi ønsker å finne hvilken verdi av t som gjør at $|x(t)|$ blir minst mulig (denne verdien er nemlig den som gjør avstanden fra $\mathbf{r}(t)$ til y-aksen minst mulig). Har du regnet riktig i punkt d) vil du ha funnet ut at $x(t)$ er lik $\alpha\,(2e^{-t} + e^{6t})$ for en konstant $\alpha > 0$.

Vi betrakter derfor funksjonen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(t) = 2e^{-t} + e^{6t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Finn hvilken verdi av t som gir et globalt minimumspunkt for g. Angi også den lineære approksimasjonen av g i $t = 0$.

SLUTT

MAT1012 - Våren 2010 - Løsningsforslag.

Oppgave 1

Vi betrakter vektorene i $\mathbb{R}^3$ *gitt ved*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

a) Betrakt påstanden '$\mathbf{b}$ *er en lineær kombinasjon av* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$*'.*
Formuler denne påstanden som en vektorlikning og på matriseform. Avgjør deretter om påstanden er sann eller gal.
Som hjelp får du opplyst at den reduserte trappeformen til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \textit{ er lik } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svar : Påstanden '$\mathbf{b}$ er en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$' som en vektor likning: '$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3$ for noen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$'.

På matriseform : Vi setter $A = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3]$. Påstanden kan da formuleres som '$\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ for en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$'.

Påstanden er gal siden den red. trappeformen til den utvidede matrisen til systemet viser at systemet er inkonsistent (siste rad gir likningen 0 =1).

b) Sett $U = Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *og la* A *være* 3×3 *matrisen som har* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *og* $\mathbf{v}_3$ *som sine kolonnevektorer.*
Angi en basis for U *og avgjør om* A *er inverterbar.*

Svar : Ved hjelp av den oppgitte red. trappeformen kan vi lese at $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2$. Så $\mathbf{v}_3$ er en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, og dermed er $U = \text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
Videre ser vi også (fra de to første kolonnene i den reduserte trappeformen) at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ er lin. uavhengig. Så $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en basis for U.

Siden kolonnene til A er lineært avhengige er ikke A inverterbar (ved IMT). Alternativt kan vi vise dette ved å regne ut at $\det A = 0$.

c) Hvis du svarte i b) at A er inverterbar, finn A^{-1}. Hvis du svarte at den ikke er det, finn en basis for $\operatorname{Nul} A$.

Svar : Fra den oppgitte red. trappeformen finner vi den reduserte trappeformen til systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det gir at $\operatorname{Nul} A = \{(t, 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}\{(1, 2, 1)\}$, så $\{(1, 2, 1)\}$ er en basis for $\operatorname{Nul} A$.

d) Vektoren $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$ *er en kompleks egenvektor til A.*

Finn den komplekse egenverdien som $\mathbf{z}$ *tilhører. Angi deretter de andre (reelle eller komplekse) egenverdiene til A sammen med en tilhørende egenvektor.*

Svar : Utregning gir at $A\mathbf{z} = (2 + 2i)\,\mathbf{z}$, så $\mathbf{z}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien $2 + 2i$. Da er $\overline{2 + 2i} = 2 - 2i$ også en egenverdi med tilhørende egenvektor $\overline{\mathbf{z}} = (-i, 1, i)$. Videre har vi sett i b) og c) at 0 er en egenverdi, med tilhørende egenvektor $(1, 2, 1)$. Siden A er en 3×3 matrise kan den ikke ha flere egenverdier.

Oppgave 2

La Ω betegne området i xy-planet som avgrenses av trekanten med hjørner i $(0, 0), (1, -1)$ og $(1, 1)$.

a) Beskriv Ω som et område av type I og beregn $\iint_\Omega (2y + e^{-x^2})\,dxdy$.

Svar : $\Omega = \{(x, y) \mid -x \leq y \leq x\,,\ 0 \leq x \leq 1\}$.

$$\iint_\Omega (2y + e^{-x^2})\,dxdy = \int_0^1 \int_{-x}^{x} (2y + e^{-x^2})\,dy\,dx = \int_0^1 (y^2 + y\,e^{-x^2})\,\Big|_{y=-x}^{y=x}\,dx$$

$$= \int_0^1 2x\,e^{-x^2}\,dx = (-e^{-x^2})\,\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y - 4, 5x + 4y - 8),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

La C betegne randkurven til området Ω, som vi gjennomgår i positivt retning, dvs mot klokkeretningen (sett ovenfra).

b) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C.
Er $\mathbf{F}$ konservativt ?

Svar : Vi har at curl $\mathbf{F} = 5 - 2 = 3 \neq 0$, så $\mathbf{F}$ er ikke konservativt. Ved Greens teorem er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C\, dt = \iint_\Omega 3\, dxdy = 3 \cdot (\text{areal av } \Omega) = 3 \cdot 1 = 3 .$$

(Dette linjeintegral kan også finnes ved direkte utregning, men det gir mere arbeid siden C må parametriseres i 3 deler). Siden $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C\, dt \neq 0$ viser også dette at $\mathbf{F}$ ikke er konservativt.

c) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ kan skrives på formen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
for en 2×2 matrise A og en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

Angi A og $\mathbf{b}$. Begrunn deretter at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

Som hjelp får du opplyst at matrisen A har egenverdiene -1 og 6.

Svar : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Siden vi får oppgitt at A har to forskjellige egenverdier, nemlig $\lambda = -1$ og $\lambda = 6$, må den være diagonaliserbar.

Enkel utregning (av $\text{Nul}(A + I)$) gir at $(1, -1)$ er en egenvektor tilhørende egenverdien -1. Tilsvarende utregning (av $\text{Nul}(A - 6I)$) gir at $(2, 5)$ er en egenvektor tilhørende egenverdien 6. Disse to egenvektorene er lineært uavhengige siden de tilhører forskjellige egenverdier.

Så $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ er inverterbar og slik at $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

d) Anta at en deriverbar vektorvaluert funksjon $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tilfredstiller $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$ samt initialbetingelsen $\mathbf{r}(0) = (6, 3)$.

Finn $x(t)$ og $y(t)$ der $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Svar : Fra c) får vi at det homogene systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ har generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{6t} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Siden $\det A = 4 - 10 = -6 \neq 0$ er A inverterbar, og likvektspunktet til systemet $\mathbf{r}' = A\,\mathbf{r} + \mathbf{b}$ er derfor gitt ved

$$A^{-1}(-\mathbf{b}) = \frac{1}{(-6)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dermed er den generelle løsningen av $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = C_1\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{6t} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Innsetting av betingelsen $\mathbf{r}(0) = (6, 3)$ gir et system i C_1 og C_2 med løsning $C_1 = 4, C_2 = 1$. Dermed er

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-t} + 2e^{6t} \\ -4e^{-t} + 5e^{6t} + 2 \end{bmatrix}.$$

e) Vi ønsker å finne hvilken verdi av t som gjør at $|x(t)|$ blir minst mulig (denne verdien er nemlig den som gjør avstanden fra $\mathbf{r}(t)$ til y-aksen minst mulig). Har du regnet riktig i punkt d) vil du ha funnet ut at $x(t)$ er lik $\alpha\,(2e^{-t} + e^{6t})$ for en konstant $\alpha > 0$.

Vi betrakter derfor funksjonen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(t) = 2e^{-t} + e^{6t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Finn hvilken verdi av t som gir et globalt minimumspunkt for g. Angi også den lineære approksimasjonen av g i $t = 0$.

Svar : Vi har at $g'(t) = -2\,e^{-t} + 6\,e^{6t} = 2e^{-t}(3\,e^{7t} - 1)$.

Dermed er $g'(t) = 0$ hvis og bare hvis $e^{7t} = \frac{1}{3}$, dvs $t = -\frac{\ln 3}{7}$. Dette er det eneste kritiske punktet til g (og må derfor være punktet vi er ute etter, men vi må begrunne at det faktisk gir et globalt minimum).

Videre er $g'(t) > 0$ hvis og bare hvis $3\,e^{7t} > 1$ hvis og bare hvis $t > -\frac{\ln 3}{7}$.
Tilsvarende er $g'(t) < 0$ hvis og bare hvis $t < -\frac{\ln 3}{7}$.

Dette gir oss at g er avtagende på $(\infty, -\frac{\ln 3}{7}]$ og voksende på $[-\frac{\ln 3}{7}, \infty)$.

Dette viser at $t = -\frac{\ln 3}{7} \simeq -0,157$ gir et globalt minimumspunkt for g.

Den lineære approksimasjonen av g i $t = 0$ er gitt ved

$$h(t) = g(0) + g'(0) \cdot t = 3 + 4t.$$

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1012 — Matematikk 2
Eksamensdag:	Torsdag 9. juni 2011
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Finn koordinatene til tyngdepunktet til området D i xy-planet gitt ved

$$D = \left\{(x, y) \,|\, 0 \le x \le \cos y\,,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Oppgave 2

Betrakt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x\,y^{\frac{4}{3}}\,,\ x^{\frac{3}{2}} + y^3)$ i xy-planet.

a) Beregn sirkulasjonen curl($\mathbf{F}$) til feltet. Er feltet konservativt?

b) La $R = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\}$. Bruk Greens teorem til å beregne linjeintegralet av $\mathbf{F}$ rundt randa til området R med positiv omløpsretning, dvs. mot klokka.

La nå C være kurven som er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t\,,\ t^{\frac{3}{2}})$ der $0 \le t \le 5$.

c) Beregn linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs C.

d) Regn ut buelengden av C.

Oppgave 3

Sett $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Sjekk at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er egenvektorer for A. Bestem egenverdiene til A og angi deres multiplisitet.

b) Finn en basis for hvert av egenrommene til A. Er A diagonaliserbar ? Hvis du svarer positivt, angi en inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

c) La $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Skriv $\mathbf{b}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Beregn deretter vektoren $\mathbf{y} = A^{100}\,\mathbf{b}$.

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2\,x_2 \\ x_2' = x_1 + 3\,x_2 \end{cases}$$

b) Finn løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2\,x_2 - 1 \\ x_2' = x_1 + 3\,x_2 - 1 \end{cases}$$

som tilfredstiller initialbetingelsen $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

SLUTT

MAT1012 - Våren 2011 - Fasit

Oppgave 1

La $(\bar{x}, \bar{y})$ angi tyngdepunktet til D. Siden området D er symmetrisk om x-aksen, er $\bar{y} = 0$. Arealet A til D er gitt ved

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy = [\sin y]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\,.$$

Videre er

$$\iint_R x \, dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos y} x \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \, dy = \frac{\pi}{4}$$

(siden $\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int 1 + \cos(2y) \, dy = \frac{1}{2}\left[y + \frac{1}{2}\sin(2y)\right] + C$).

Dermed er

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_R x \, dx dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \quad (\simeq 0,39\,)\,.$$

($\bar{y} = 0$ kan også regnes ut på tilsvarende måte.)

Oppgave 2

a) curl $\mathbf{F}(x, y) = \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\, x\, y^{\frac{1}{3}}$. Siden sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ ikke er konstant lik null i hele planet er $\mathbf{F}$ ikke konservativt.

b) La K betegne randa til R (mot klokka). Greens teorem gir

$$\int_K \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_K \, ds = \iint_R \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\, x\, y^{\frac{1}{3}} \, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\, x\, y^{\frac{1}{3}} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\, y - x\, y^{\frac{4}{3}}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - x \, dx = \left[x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

c) Direkte utregning gir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds = \int_0^5 t\,(t^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}} \cdot 1 + \left(t^{\frac{3}{2}} + (t^{\frac{3}{2}})^3\right) \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \, dt$$

$$= \int_0^5 t^3 + \frac{3}{2}\,(t^2 + t^5) \, dt = \left[\frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{4} t^6\right]_0^5 = 4125\,.$$

d) Buelengden av C er

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + (\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}})^2}\, dt = \int_0^5 (1+\frac{9}{4} t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \Big[\frac{8}{27}\,(1+\frac{9}{4}\, t)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^5 = \frac{335}{27} \quad (\simeq 12{,}41)\,.$$

Oppgave 3

a) Utregning gir $A\mathbf{u} = \mathbf{0} = 0\,\mathbf{u}$ og $A\mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$, så $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er egenvektorer for A (tilhørende henholdsvis egenverdiene 0 og -1).

Videre utregning gir $\det(A - \lambda I) = -\lambda\,(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -\lambda\,(\lambda + 1)^2$. Så egenverdiene til A er 0, med multiplisitet 1, og -1, med multiplisitet 2.

b) Finner at en basis for $E_0 = \mathrm{Nul}(A)$ er f.eks. $\{\mathbf{u}\}$, mens en basis for $E_{-1} = \mathrm{Nul}(A + I)$ er f.eks. $\{(1, 1, 0), \mathbf{v}\}$. For begge egenverdiene til A er altså dimensjonen til det tilhørende egenrommet lik multiplisiten til egenverdien. Dermed er A diagonaliserbar.

En inverterbar matrise som diagonaliserer A er f.eks. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Finner at $\mathbf{b} = (1, 3, 5) = 3\,\mathbf{u} - 2\,\mathbf{v}$. Dermed er

$$\mathbf{y} = A^{100}\,\mathbf{b} = 3\,A^{100}\,\mathbf{u} - 2\,A^{100}\,\mathbf{v} = \mathbf{0} - 2\,(-1)^{100}\,\mathbf{v} = -2\,\mathbf{v} = (-2, 0, 2)\,.$$

Oppgave 4

a) Det karakteristiske polynomet til koeffisientmatrisen til systemet blir $\lambda^2 - 4\,\lambda + 5$, som har komplekse røtter $2 \pm i$.

Utregning gir at en kompleks egenvektor tilhørende egenverdien $2 + i$ er f.eks. $\mathbf{z} = (-2, 1 + i)$. En kompleks egenfunksjon for systemet er derfor

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= e^{(2+i)t}\,(-2, 1 + i) = e^{2t}(\cos t + i\,\sin t)\,(-2, 1 + i)\\ &= e^{2t}(-2\cos t, \cos t - \sin t) + i\,e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t)\,.\end{aligned}$$

Den generelle løsningen $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ av systemet bli derfor

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t}\,(-2\cos t, \cos t - \sin t) + C_2\, e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t)\,,$$

dvs

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -2e^{2t}\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\,,\\ x_2(t) &= e^{2t}\,(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)) \end{aligned}$$

der C_1 og C_2 er reelle konstanter.

b) Siden $\det(A) = 3 + 2 = 5 \neq 0$ er A inverterbar. Systemet har derfor et entydig likevektspunkt gitt ved

$$A^{-1}\left(-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Det assosierte homogene systemet har vi løst i a). Den generelle løsningen $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ av det inhomogene systemet blir derfor

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t}\,(-2\cos t, \cos t - \sin t) + C_2\, e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t) + (1, 0)$$

der C_1 og C_2 er reelle konstanter.

Initialbetingelsen $x_1(0) = x_2(0) = 0$ gir

$$C_1(-2, 1) + C_2(0, 1) + (1, 0) = (0, 0)\,,$$

dvs $C_1 = 1/2 = -C_2$. Dermed blir løsningen

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\,(-2\cos t, \cos t - \sin t) - \frac{1}{2}\,e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t) + (1, 0)\,,$$

dvs

$$x_1(t) = e^{2t}(\sin t - \cos t) + 1, \quad x_2(t) = -e^{2t}\sin t\,.$$

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1012 — Matematikk 2

Eksamensdag: Tirsdag 12. juni 2012

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Vi har gitt tre vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) La A være 3×3 matrisen som har $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ som sine søylevektorer. Vis at A ikke er inverterbar, og finn en basis for vektorrommet $U = Span\{\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Finn også en basis for nullrommet $Nul(A)$ til A.

b) (10 poeng) Vektoren $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix}$ er en kompleks egenvektor for A.

Finn den komplekse egenverdien som $\mathbf{z}$ tilhører. Angi deretter de andre (reelle eller komplekse) egenverdiene til A sammen med de tilhørende egenvektorene.

c) (5 poeng) Finn en kompleks 3×3 inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ blir en diagonal kompleks 3×3 matrise.

Oppgave 2

La Ω betegne området i xy-planet som begrenses av trekanten med hjørner i $(0,0), (4,0)$ og $(0,2)$.

a) (12 poeng) Beregn dobbeltintegralene

$$\iint_{\Omega} x\,dx\,dy \quad \text{og} \quad \iint_{\Omega} y\,dx\,dy$$

og bruk disse til å finne koordinatene til tyngdepunktet til Ω.

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (2y + xy + x^2, 2x + 5y + \frac{1}{2}y^2 + 1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

La C betegne randkurven til området Ω, som vi gjennomgår i positivt retning, dvs mot klokkeretningen (sett ovenfra).

b) (12 poeng) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C. Er $\mathbf{F}$ konservativt?

Oppgave 3

Et annet vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{G}(x,y) = (x - y - 1, 3x + 5y + 1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

a) (8 poeng) Betrakt $\mathbf{G}$ som en avbildning fra $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vektorfeltet $\mathbf{G}$ kan skrives på formen $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, for en 2×2 matrise A og en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Angi A og $\mathbf{b}$. Begrunn deretter at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

b) (10 poeng) Anta at en deriverbar vektorvaluert funksjon $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tilfredstiller $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{G}(\mathbf{r}(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$ samt initialbetingelsen $\mathbf{r}(0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Finn $x(t)$ og $y(t)$ der $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$.

SLUTT

Eksamen MAT 1012, tirsdag 12. juni 2012

Løsningsforslag

Oppgave 1

Vi har gitt tre vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) La A være 3×3 matrisen som har $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ som sine søylevektorer. Vis at A ikke er inverterbar, og finn en basis for vektorrommet $U = \mathit{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Finn også en basis for nullrommet $\mathit{Nul}(A)$ til A.

Løsning. Vi har

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og regner ut at $\det A = 0$. Matrisen A er derfor ikke invertibel. Det er lett å se at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige. Siden determinanten til A er 0, vil søylevektorene danne en lineært avhengig mengde. De to vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ utgjør derfor en basis for U. Nullrommet må ha dimensjon 3-2=1, og vi finner et basis-element ved å løse

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

f.eks.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

b) Vektoren $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix}$ er en kompleks egenvektor for A. Finn den komplekse egenverdien som $\mathbf{z}$ tilhører. Angi deretter de andre (reelle eller komplekse) egenverdiene til A sammen med de tilhørende egenvektorene.

Løsning. Vi har

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -3-i \\ -1+i \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix}$$

Komplekse egenverdier opptrer alltid i konjugerte par, så $1-i$ er også en egenverdi, og egenvektoren er den konjugerte av egenvektoren til $1+i$, dvs. $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \\ -i \end{pmatrix}$.

I tillegg vet vi fra oppgave a) at 0 er en egenverdi med egenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

c) Finn en kompleks 3×3 inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ blir en diagonal kompleks 3×3 matrise.

Løsning. Matrisen P har som sine søyler de tre egenvektorene til A, dvs

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2+i & -2-i \\ -1 & i & -i \end{pmatrix}$$

□

Oppgave 2

La Ω betegne området i xy-planet som begrenses av trekanten med hjørner i $(0,0), (4,0)$ og $(0,2)$.

a) Beregn dobbeltintegralene

$$\iint_{\Omega} x\,dx\,dy \quad \text{og} \quad \iint_{\Omega} y\,dx\,dy$$

og bruk disse til å finne koordinatene til tyngdepunktet til Ω.

Løsning. Vi kan gi Ω som et type 2-område ved $0 \le y \le 2$, $0 \le x \le 4-2y$. Det gir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} x\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} x\,dx\,dy = \int_0^2 [\frac{1}{2}x^2]_0^{4-2y}\,dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}(4-2y)^2\,dy = \int_0^2 8 - 8y + 2y^2\,dy \\ &= [8y - 4y^2 + \frac{2}{3}y^3]_0^2 = 16 - 16 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} y\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} y\,dx\,dy = \int_0^2 [xy]_0^{4-2y}\,dy \\ &= \int_0^2 (4-2y)y\,dy = \int_0^2 4y - 2y^2\,dy \\ &= [2y^2 - \frac{2}{3}y^3]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Siden arealet av trekanten er $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$, får vi $\overline{x} = \frac{1}{4}\frac{16}{3} = \frac{4}{3}$, og $\overline{y} = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$.

□

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (2y + xy + x^2, 2x + 5y + \frac{1}{2}y^2 + 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

La C betegne randkurven til området Ω, som vi gjennomgår i positivt retning, dvs mot klokkeretningen (sett ovenfra).

b) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C. Er $\mathbf{F}$ konservativt?

Løsning. Vi har

$$\begin{aligned} curl(\mathbf{F}) &= \frac{\partial(2x + 5y + \frac{1}{2}y^2 + 1)}{\partial x} - \frac{\partial(2y + xy + x^2)}{\partial y} \\ &= 2 - (2 + x) = -x \neq 0 \end{aligned}$$

Så feltet er ikke konservativt. Vi bruker Greens teorem til å beregne linjeintegralet, vi har

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds &= \iint_\Omega curl(\mathbf{F}) \, dx \, dy \\ &= -\iint_\Omega x \, dx \, dy \\ &= -\overline{x} \cdot areal(\Omega) = -\frac{4}{3} \cdot 4 = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

□

Oppgave 3

Et annet vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{G}(x, y) = (x - y - 1, 3x + 5y + 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Betrakt $\mathbf{G}$ som en avbildning fra $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vektorfeltet $\mathbf{G}$ kan skrives påformen $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, for en 2×2 matrise A og en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Angi A og $\mathbf{b}$. Begrunn deretter at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

Løsning. Vi har

$$\mathbf{G}(x, y) = (x - y - 1, 3x + 5y + 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

er invertibel siden $\det A = 1 \cdot 5 - (-1)3 = 8 \neq 0$. Vi finner egenverdier og egenvektorer til A ved å sette

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) - (-1) \cdot 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

som gir $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 4$, og egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

og dermed

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

□

b) Anta at en deriverbar vektorvaluert funksjon $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tilfredstiller $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{G}(\mathbf{r}(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$ samt initialbetingelsen $\mathbf{r}(0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Finn $x(t)$ og $y(t)$ der $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Løsning. Vi finner først likevektspunktet ved å sette $x - y - 1 = 3x + 5y + 1 = 0$. Det gir $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Dernest løser vi det homogene systemet og finner en generelle løsningen ved å legge denne til likevektspunktet.

$$x(t) = Ae^{2t} + Be^{4t} + \frac{1}{2}$$
$$y(t) = -Ae^{2t} - 3Be^{4t} - \frac{1}{2}$$

For å finne den spesielle løsningen setter vi inn for initialbetingelsen og løser likningssystemet

$$\frac{3}{2} = x(0) = Ae^0 + Be^0 + \frac{1}{2} = A + B + \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = y(o) = -Ae^0 - 3Be^0 - \frac{1}{2} = -A - 3B - \frac{1}{2}$$

som gir $A = 2$, $B = -1$, og

$$x(t) = 2e^{2t} - e^{4t} + \frac{1}{2}$$
$$y(t) = -2e^{2t} + 3e^{4t} - \frac{1}{2}$$

□

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1012 — Matematikk 2
Eksamensdag:	Torsdag 6. juni 2013
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (15 poeng)
La A være 3×3-matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 12 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis at vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektorer for matrisen A. Finn egenverdiene til A og angi deres multiplisitet. Finn de tilhørende egenrommene og skriv opp en matrise P som diagonaliserer A.

Oppgave 2 (12 poeng)
Et homogent differensiallikningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x + y \\ y'(t) &= -5x - 2y \end{aligned}$$

Finn løsningen av systemet som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Oppgave 3 (12 poeng)
Gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (y + x^3 + ye^x, x + y^2 + e^x)$. Bruk Greens teorem til å beregne integralet av vektorfeltet langs sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, med positiv omløpsretning (mot klokka).

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 4
En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

a) (8 poeng) Finn lengden av kurven C.

b) (8 poeng) Finn integralet av funksjonen $f(x, y) = 2xy$ langs kurven C.

OPPGAVE 5 (12 poeng)
La D være området i (x, y)-planet avgrenset av x-aksen, linjene $x = -\ln 2$ og $x = \ln 2$, og grafen til funksjonen $f(x) = e^x$. Vi oppgir at arealet til området D er $\frac{3}{2}$. Finn x-koordinaten til tyngdepunktet til området D.

SLUTT

MAT1012 Matematikk 2, Torsdag 6. juni 2013
Løsningsforslag

OPPGAVE 1

(15 poeng) La A være 3×3-matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 12 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis at vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektorer for matrisen A. Finn egenverdiene til A og angi deres multiplisitet. Finn de tilhørende egenrommene og skriv opp en matrise P som diagonaliserer A.

Løsning.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} = 16\mathbf{v}_1, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\mathbf{v}_2$$

som betyr at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer med egenverdier $\lambda_1 = 16$ og $\lambda_2 = 4$. Karakteristisk polynom:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 10-\lambda & 3 & -3 \\ 12 & 10-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} &= (4-\lambda)((10-\lambda)^2 - 36) \\ &= (4-\lambda)(10-\lambda-6)(10-\lambda+6) \\ &= (4-\lambda)^2(16-\lambda) \end{aligned}$$

som betyr at $\lambda_1 = 16$ har multiplisitet 1, og $\lambda_2 = 4$ har multiplisitet 2. Egenrom for $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 10-4 & 3 & -3 \\ 12 & 10-4 & -6 \\ 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6A+3B-3C \\ 12A+6B-6C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som gir $B = C - 2A$, og egenvektorer

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C-2A \\ C \end{pmatrix}$$

Setter vi $A = C = 1$ får vi tilbake $\mathbf{v}_2$. Mange muligheter for den siste egenvektoren, sett f.eks. $A = 0$, $C = 1$, som gir $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Konklusjon: Egenrom for $\lambda_1 = 16$; $E_1 = \text{Span}(\mathbf{v}_1)$, egenrom for $\lambda_2 = 4$; $E_2 = \text{Span}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Oppgave 2

(12 poeng) Et homogent differensiallikningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x + y \\ y'(t) &= -5x - 2y \end{aligned}$$

Finn løsningen av systemet som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Løsning. Koeffisientmatrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ har karakteristisk polynom:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 1 \cdot (-5) = \lambda^2 + 1$$

som gir egenverdier $\lambda = \pm i$, og egenvektorer $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \mp i \end{pmatrix}$. Det gir løsning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (C\cos t + D\sin t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (D\cos t - C\sin t)$$

Initialverdi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} D$$

som gir $C = 0$ og $D = -1$, mao.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

Oppgave 3

(12 poeng) Gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (y + x^3 + ye^x, x + y^2 + e^x)$. Bruk Greens teorem til å beregne integralet av vektorfeltet langs sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, med positiv omløpsretning (mot klokka).

Løsning.

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = (1 + e^x) - (1 + e^x) = 0$$

som gir

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_S \, ds = \iint_D \text{curl}(\mathbf{F}) \, dx dy = \iint_D 0 \, dx dy = 0$$

OPPGAVE 4

En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t\cos t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

a) (8 poeng) Finn lengden av kurven C.

b) (8 poeng) Finn integralet av funksjonen $f(x,y) = 2xy$ langs kurven C.

Løsning.

a) Vi har

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t\cos t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

og derfor $\mathbf{r}'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t)$.

$$\int_C ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

b)

$$\begin{aligned}\int_C f\, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2t \sin 2t \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4t \cdot 2\, dt = 2[-\frac{1}{4}\cos 4t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0\end{aligned}$$

OPPGAVE 5

(12 poeng) La D være området i (x,y)-planet avgrenset av x-aksen, linjene $x = -\ln 2$ og $x = \ln 2$, og grafen til funksjonen $f(x) = e^x$. Vi oppgir at arealet til området D er $\frac{3}{2}$. Finn x-koordinaten til tyngdepunktet til området D.

Løsning.

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2} \cdot \overline{x} &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \int_0^{e^x} x\, dy\, dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [xy]_0^{e^x}\, dx \\ &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} xe^x\, dx = [xe^x]_{-\ln 2}^{\ln 2} - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x\, dx \\ &= \ln 2 \cdot 2 + \ln 2 \cdot \tfrac{1}{2} - (2 - \tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{5}{2} \cdot \ln 2 - \tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

som gir $\overline{x} = \frac{5}{3}\ln 2 - 1$.

SLUTT.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1012 — Matematikk 2
Eksamensdag:	Onsdag 4. juni 2014
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 La D være området i (x, y)-planet avgrenset av x-aksen, y-aksen og grafen til funksjonen $g(x) = 1 - x^2$.

a) (8 poeng) Regn ut dobbeltintegralet av funksjonene

$$f(x, y) = x \quad \text{og} \quad g(x, y) = y$$

over området D.

b) (4 poeng) Vis at arealet av området D er $\frac{2}{3}$.

c) (6 poeng) Finn koordinatene til tyngdepunktet til området D.

Oppgave 2

a) (12 poeng) Et homogent differensiallikningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x - y \\ y'(t) &= 5x \end{aligned}$$

Finn løsningen av systemet som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = 3$, $y(0) = 5$.

b) (6 poeng) Et inhomogent differensiallikningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1 + 2x_2 - 3 \\ x_2'(t) &= -x_1 + 4x_2 - 3 \end{aligned}$$

Finn likevektstilstanden for systemet.

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE 3 (12 poeng) Gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x,y) = (\sin y + x^3 + 1, x + x\cos y)$$

Bruk Greens teorem til å beregne integralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y)$ langs omkretsen til kvadratet gitt ved $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ med positiv omløpsretning (mot klokka).

OPPGAVE 4
En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t, 2 + 2\sin t) \quad 0 \le t \le \pi$$

a) (6 poeng) Finn buelengden av kurven C.

b) (6 poeng) Finn integralet av funksjonen $f(x,y) = xy$ langs kurven C.

c) (6 poeng) Finn integralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (2 - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{3}{2})$ langs med kurven C, med positiv omløpsretning (mot klokka).

SLUTT

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1012 — Matematikk 2
Eksamensdag:	Onsdag 4. juni 2014
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1 La D være området i (x, y)-planet avgrenset av x-aksen, y-aksen og grafen til funksjonen $g(x) = 1 - x^2$.

a) (8 poeng) Regn ut dobbeltintegralet av funksjonene

$$f(x, y) = x \quad \text{og} \quad g(x, y) = y$$

over området D.

b) (4 poeng) Vis at arealet av området D er $\frac{2}{3}$.

c) (6 poeng) Finn koordinatene til tyngdepunktet til området D.

Løsning. a) Området D er gitt ved $0 \le y \le 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\, dydx &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^1 \left[xy\right]_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 x - x^3\, dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}}}\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\iint_D g(x, y)\, dydx &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} y\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x^2} dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 1 - 2x^2 + x^4\, dx = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \tfrac{4}{15}\end{aligned}$$

b) Arealet $A = areal(D)$ er gitt ved

$$A = \iint_D 1\, dydx = \int_0^1 1\, dydx = \int_0^1 1 - x^2\, dx \int_0^1 1 - x^2\, dx = \left[x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}}$$

c) Tyngdepunktet har koordinater $(\overline{x}, \overline{y})$ gitt ved

$$A \cdot \overline{x} = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x\, dy\, dx \quad \text{og} \quad A \cdot \overline{y} = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} y\, dy\, dx$$

som gir ved å kombinere resultatene i a) og b)

$$\overline{x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot \tfrac{1}{4} = \underline{\underline{\tfrac{3}{8}}} \quad \text{og} \quad \overline{y} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot \tfrac{4}{15} = \underline{\underline{\tfrac{2}{5}}}$$

Oppgave 2

a) (12 poeng) Et homogent differensiallikningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x - y \\ y'(t) &= 5x \end{aligned}$$

Finn løsningen av systemet som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = 3$, $y(0) = 5$.

b) (6 poeng) Et inhomogent differensiallikningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1 + 2x_2 - 3 \\ x_2'(t) &= -x_1 + 4x_2 - 3 \end{aligned}$$

Finn likevektstilstanden for systemet.

Løsning. a) Koeffisientmatrisen har karakteristisk polynom

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

som gir egenverdier $\lambda = 1 \pm 2i$, og egenvektor (α, β) gitt ved

$$\begin{pmatrix} 2-(1+2i) & -1 \\ 5 & -(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor vi setter

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^t\begin{pmatrix} C\cos 2t + D\sin 2t + 2(D\cos 2t - C\sin 2t) \\ 5(C\cos 2t + D\sin 2t) + 0 \end{pmatrix} \\ &= e^t\begin{pmatrix} (C+2D)\cos 2t + (D-2C)\sin 2t \\ 5C\cos 2t + 5D\sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Innsatt

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = e^0\begin{pmatrix} (C+2D)\cos 0 + (D-2C)\sin 0 \\ 5C\cos 0 + 5D\sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C+2D \\ 5C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gir $C = D = 1$, og løsning

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{e^t\begin{pmatrix} 3\cos 2t - \sin 2t \\ 5\cos 2t + 5\sin 2t \end{pmatrix}}}$$

b) Likevektstilstanden finnes ved å sette $x_1'(t) = x_2'(t) = 0$. Det gir

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

som gir $\underline{\underline{x_1 = x_2 = 1}}$

OPPGAVE 3 (12 poeng) Gitt et vektorfelt

$$\mathsf{F}(x, y) = (\sin y + x^3 + 1, x + x \cos y)$$

Bruk Greens teorem til å beregne integralet av vektorfeltet $\mathsf{F}(x, y)$ langs omkretsen til kvadratet gitt ved $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ med positiv omløpsretning (mot klokka).

Løsning.

$$curl(\mathsf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x + x\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin y + x^3 + 1) = 1 + \cos y - \cos y = 1$$

Arealet av kvadratet K er 1, som gir at

$$\oint_{\partial K} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r} = \iint_K curl(\mathsf{F})\, dx\, dy = \iint_K 1\, dx\, dy = \underline{\underline{1}}$$

OPPGAVE 4

En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathsf{r}(t) = (1 + 2\cos t, 2 + 2\sin t) \quad 0 \leq t \leq \pi$$

a) (6 poeng) Finn buelengden av kurven C.

b) (6 poeng) Finn integralet av funksjonen $f(x, y) = xy$ langs kurven C.

c) (6 poeng) Finn integralet av vektorfeltet $\mathsf{F}(x, y) = (2 - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{3}{2})$ langs med kurven C, med positiv omløpsretning (mot klokka).

Løsning. a) Vi har $\mathsf{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$, som gir

$$B = \int_C ds = \int_0^\pi ||\mathsf{r}'(t)||\, dt = 2\pi = \int_0^\pi \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_C xy\, ds &= \int_0^\pi (1 + 2\cos t)(2 + 2\sin t)||\mathsf{r}'(t)||\, dt \\ &= 2\int_0^\pi 2 + 2\sin t + 4\cos t + 4\sin t\cos t\, dt \\ &= 2\big[2t - 2\cos t + 4\sin t + 2\sin^2 t\big]_0^\pi = \underline{\underline{4\pi + 8}} \end{aligned}$$

c) Vi har $\mathsf{F}(\mathsf{r}(t)) = (2 - \frac{2+2\sin t}{2}, \frac{1+2\cos t}{2} + \frac{3}{2}) = (1-\sin t, 2+\cos t)$ og dermed

$$\begin{aligned}
\int_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r} = \int_C \mathsf{F}(\mathsf{r}(t)) \cdot \mathsf{r}'(t)\, dt &= \int_0^\pi (1-\sin t, 2+\cos t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt \\
&= \int_0^\pi -2\sin t + 2\sin^2 t + 4\cos t + 2\cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^\pi -2\sin t + 4\cos t + 2\, dt \\
&= \big[2\cos t + 4\sin t + 2t\big]_0^\pi = \underline{\underline{2\pi - 4}}
\end{aligned}$$