FASIT.

Oppgave 1.

a) Vi har $T(x,y,z) = x - \sqrt{3}\,y - \sqrt{5}\,z = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Altså vil $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$ stå normalt på alle $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in N(T)$.

b) Generell løsning av $x - \sqrt{3}\,y - \sqrt{5}\,z = 0$ er gitt ved
$y = s,\ z = t,\ x = \sqrt{3}\,s + \sqrt{5}\,t$, dvs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,s + \sqrt{5}\,t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\bar{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgjør en basis for $N(T)$.

c) $$pr_{\bar{v}}(\bar{w}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{|\bar{v}|^2}\bar{v} = \frac{\sqrt{15}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}' = \bar{w} - pr_{\bar{v}}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{w}'$ er vinkelrett på $\bar{v}$

d) $\bar{u}$, $\bar{v}$ og $\bar{w}'$ er en ortogonal basis med denne egenskapen.
Vi må bare dele på lengdene:

$|\bar{u}|^2 = 1 + 3 + 5 = 9 \Rightarrow |\bar{u}| = 3$

$|\bar{v}|^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow |\bar{v}| = 2$

$|\bar{w}'|^2 = \frac{5}{16} + \frac{15}{16} + 1 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \Rightarrow |\bar{w}'| = \frac{3}{2}$

Får da

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_3 = \frac{\bar{w}'}{|\bar{w}'|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{6} \\ -\frac{\sqrt{15}}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e) Vi skal ha $M[\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3] = I_3$. Matrisen $A = [\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3]$

er ortogonal. Da er

$$M = A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{5} & -\frac{1}{6}\sqrt{15} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

f) Siden $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ er ortonormal, har vi at

$a_i = e_1 \cdot u_i$, altså

$a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = \frac{\sqrt{5}}{6}$

Oppgave 2 $\bar{F} = (2xy + x,\ x^2 - y^2 - y) = (p, q)$

a) $\operatorname{curl} \bar{F} = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 2x - 2x = 0$, så $\bar{F}$ er konservativt.

Vi finner et potensial:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + x \Rightarrow f = x^2 y + \frac{1}{2}x^2 + h(y)$. Dette gir

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + h'(y) = x^2 - y^2 - y$. Kan velge $h(y) = -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2$,

dvs. $\underline{\underline{f = x^2 y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2}}$

b) Kritiske punkter er gitt ved

(I) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + x = x(2y+1) = 0$

(II) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2 - y = 0$

(I) gir $x = 0$ eller $y = -\frac{1}{2}$

For $x = 0$ gir (II) $y^2 + y = y(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ eller $y = -1$

For $y = -\frac{1}{2}$ gir (II) $x^2 = y^2 + y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ Umulig.

Altså $(0,0)$ og $(0,-1)$ er de kritiske punktene.

c) $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 1$ $\quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$ $\quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2y - 1 = -(2y+1)$

$H = AC - B^2 = -(2y+1)^2 - 4x^2$

$H(0,0) = -1^2 = -1 < 0 \Rightarrow (0,0)$ er sadelpunkt

$H(0,-1) = -(-1)^2 = -1 < 0 \Rightarrow (0,-1)$ er sadelpunkt.

d) $F^{\perp} = (y^2 + y - x^2,\ 2xy + x)$.

Prøver å finne potensial:

$\frac{\partial g}{\partial x} = y^2 + y - x^2 \Rightarrow g = xy^2 + xy - \frac{1}{3}x^3 + h(y)$. Da er

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2xy + x + h'(y)$. Kan velge $h(y) = 0$.

Integralkurvene er gitt ved

$$g(x,y) = \underline{\underline{xy^2 + xy - \frac{1}{3}x^3 = C}}.$$

Vi løser for y:

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + \frac{4}{3}x^4 + 4Cx}}{2x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3}x^2 + 4C/x}}{2}$$

Vi ser at for $C = 0$ gir fortegnet $+$ den oppgitte løsningen.

(Man kan også bare sette inn y i $g(x,y)$.)

e) Vi finner endepunktene for C:
$x = 0$ gir $y = 0$, dvs. $P = (0,0)$
$x = \sqrt{6}$ gir $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{3}\cdot 6} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9} - 1\right) = 1$, dvs $Q = (\sqrt{6}, 1)$.

Dette gir

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{o} = \int_C \nabla f \cdot d\bar{o} = f\Big|_P^Q = x^2y + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2 \Big|_{(0,0)}^{(\sqrt{6},1)}$$

$$= 6\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 6 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} = 9 - \tfrac{5}{6} = \underline{\underline{\tfrac{49}{6}}}$$

f) $\bar{F}$ er tangentiell til C. Da er $\bar{F}^{\perp}$ normal til C

og $\int_C F^{\perp}\cdot d\bar{o} = 0$.